



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

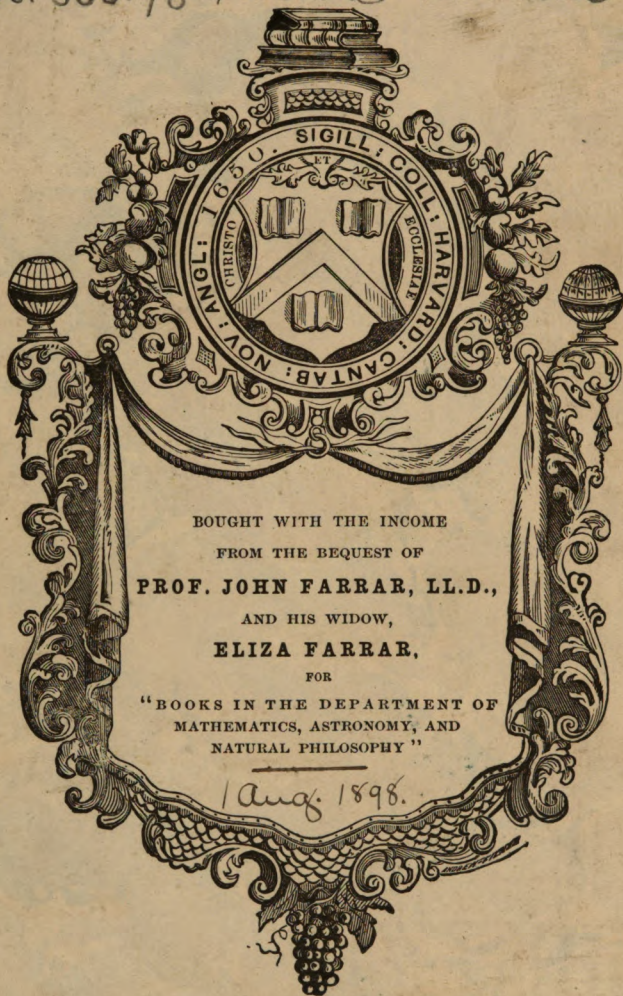
We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

Sci. 880.48 Period. Shelves



SCIENCE CENTER LIBRARY



BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

COMITÉ DE RÉDACTION

BRISSE (CH.)
JORDAN (CAMILLE)
LAGUERRE
LEVY (MAURICE)
MANNHEIM
SARRAU

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES

TOME TROISIÈME — ANNÉE 1874..75

PARIS
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ
RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7

1875

Sci. 880.48

Farrar fund

ÉTAT DE LA SOCIÉTÉ

AU 31 JANVIER 1875

(Les initiales S. P. désignent les sociétaires perpétuels)

ACHARD (Marc), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
ALLÈGRET, professeur à la Faculté des Sciences, à Clermont.
ANDRÉ (Désiré), agrégé de l'Université, à Paris.
ANTOINE (Ch.), ingénieur de la Marine, à Brest.
Aoust (L'abbé), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.
ARON (Henri), banquier, à Paris.
BACH, doyen de la Faculté des Sciences, à Nancy.
BAILLAUD, aide-astronome à l'Observatoire, à Paris.
BAILLOUD, inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite, à Paris.
BARBIN (H.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Lillers (Pas-de-Calais).
BENOIST, docteur en droit, à Châlon-sur-Saône.
BERDELLÉ, ancien garde-général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
BERTRAND (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, à Paris.
BETNAC, professeur de mathématiques, à Paris.
BIENAYMÉ (Alexis), capitaine du Génie, à Versailles.
BIENAYMÉ (Arthur), ingénieur de la Marine, à Brest.
BIENAYMÉ (J.), membre de l'Institut, à Paris.
BLEYNE (Martial), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
BONNET (Ossian), membre de l'Institut, à Paris.
BOUCHÉ (A.), ancien élève de l'École Normale, directeur de l'École préparatoire d'Angers.
BOUFFET (M.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Carcassonne.
BOURGET, agrégé de l'Université, à Paris.
BREHARD, architecte, à Paris.
BRIOSCHI, professeur à l'Université de Pavie (Italie).
BRISSE (A.), ingénieur en chef du dessèchement du lac Fucino (Italie).
BRISSE (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
BROCARD, capitaine du Génie, à Alger. S. P.
BRUNET, ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.
CAHEY, sous-lieutenant du Génie, à l'École de Fontainebleau.
CATALAN, professeur à l'Université de Liège (Belgique).
CHARLON, directeur de *la Confiance*, à Paris.
CHASLES, membre de l'Institut, à Paris. S. P.
CHEVALLIER, aide-astronome à l'Observatoire, à Paris.
CIVIALE, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
CLAVEUX, sous-intendant de 1^{re} classe, à Versailles.

COLLET, professeur au lycée de Troyes.
COLLIGNON (Ed.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Paris.
COMBETTE, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris.
CONINCK (Gustave de), ancien élève de l'École Polytechnique, à Dinan.
CORNU (A.), professeur à l'École Polytechnique, à Paris.
COURCELLES (C.), professeur de mathématiques spéciales au lycée de Douai.
CROULLEBOIS (Marcel), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.
CUVINOT, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Mantes.
DARBOUX, professeur suppléant à la Faculté des Sciences, à Paris.
DESBOVES, professeur au lycée Fontanes, à Paris.
DESCHAMPS, capitaine d'Artillerie, à Paris.
DESQ (L.), capitaine d'Artillerie, à Bourges.
DEWULF (Ed.), commandant du Génie, aux îles d'Hyères.
DOSTOR (G.), docteur ès sciences, à Paris.
DU BUIT (Paul), ingénieur du Génie maritime, au Havre.
DUGUEN, ingénieur civil, à Roye (Somme).
DURRANDE (H.), professeur à la Faculté des Sciences, à Rennes.
FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, à Nîmes.
FITREWANN, ancien élève de l'École Polytechnique, à Evreux.
FLORENTIN, capitaine d'Artillerie, à Paris.
FLYE SAINTE-MARIE (C.), capitaine d'Artillerie, à Paris.
FONTES (J.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Condom.
FOURET (G.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
GABRIEL (M.-C.), professeur à l'École de Médecine, à Paris.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-libraire, à Paris. S. P.
GENTY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Oran.
GERONO, professeur de mathématiques, à Paris.
GIROD (A.), ingénieur des Manufactures de l'Etat, à la Havane (Cuba).
GOFFART (M.), professeur de mathématiques, à Paris.
GONZALES (José), directeur de l'observatoire de Bogota (Colombie).
GOURNERIE (de la), membre de l'Institut, à Paris.
GRAINDORGE (J.), docteur ès sciences, à Liège (Belgique).
HAAG, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
HALPHEN (G.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris. S. P.
HATON DE LA GOUPILLIERE, ingénieur des Mines, à Paris. S. P.
HATT (Ph.), ingénieur hydrographe, à Paris.
HENRY (P.), lieutenant au 10^e régiment d'Artillerie, à Rennes.
HENNY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Orléans.
HÉRAUD (G.), ingénieur hydrographe, à Paris.
HERMARY, capitaine au 25^e régiment d'Artillerie, à Vincennes.
HERMITE, membre de l'Institut, à Paris. S. P.
HILAIRE, professeur au lycée de Douai.
HOUBICANT (J.), chef de bataillon du Génie en retraite, à Paris.
HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, à Paris.
HUYOT (E.), ingénieur des Mines, à Paris.
JACQUIER (J.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Amiens.
JANIN, capitaine au 13^e régiment d'Artillerie, à Vincennes.
JAVARY, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, à Paris.
JORDAN (C.), ingénieur des Mines, à Paris. S. P.
JOUFFRET, capitaine d'Artillerie, professeur à l'École d'application de Fontainebleau.
JULLY, chef d'institution, à Paris.
KÖHLER, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
KRETZ, ingénieur des Manufactures de l'Etat, à Paris.
LAGUENRE, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
LAISANT, capitaine du Génie, à Bastia.
LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
LAX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Vendôme.

LEFÈBRE DE FOURCY (R.), à Paris.
LEFFLER (Dr Mittag), professeur à l'Université d'Upsal (Suède).
LEHR, professeur au lycée de Marseille.
LEMONNIER, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, à Paris.
LEMOINE (E.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
LÉVY (Albert), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
LEVY (Maurice), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
LIGUINE, professeur à l'Université d'Odessa (Russie).
LUCAS (F.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
LUCAS (E.), professeur au lycée de Moulins.
MALEYX (L.), professeur au collège Stanislas, à Paris.
MANNHEIM (A.), professeur à l'École Polytechnique, à Paris. S. P.
MAREL, colonel d'État-major en retraite, à Alger.
MARGERIE, sous-directeur de l'Institution Monge, à Paris.
MARIE (Maximilien), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
MARIN, ingénieur, à Paris.
MARSILLY (Général de), ancien élève de l'École Polytechnique, à Auxerre.
MATHIEU, professeur à la Faculté des Sciences, à Nancy.
NICHELET, ingénieur civil, à Paris.
NIGNON (A.), capitaine au 6^e régiment d'Artillerie, à Grenoble.
MONTIGNY (G. de), lieutenant du Génie, à Paris.
MOREL (A.), ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
MOUTARD (Th.), ingénieur des Mines, à Paris.
NICOLAÏDÈS, professeur à l'Université d'Athènes (Grèce).
OVIDIO (Enrico d'), professeur à l'Université de Turin (Italie).
PAINVIN, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, à Paris.
PARMENTIER (Th.), colonel du Génie, à Lyon.
PARRAN (A.), ingénieur des Mines, à Paris.
PERCIN (A.), capitaine au 21^e régiment d'Artillerie, à La Rochelle.
PERRIER, capitaine d'État-Major, membre du Bureau des Longitudes, à Paris.
PERRIN, ingénieur des Mines, à Paris.
PHILIPPE, ingénieur, à Corbeil.
PHILIPPON, secrétaire de la Faculté des Sciences, à Paris.
PICART (A.), député à l'Assemblée nationale, à Versailles.
PICQUET (H.), répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
PISTOYE (L. de), capitaine d'Artillerie, à Tarbes.
PLOCQ (A.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Dunkerque.
PLOIX (Edmond), ingénieur hydrographe, à Paris.
POIREL (V.), inspecteur général honoraire des Ponts et Chaussées, à Rosières-aux-Salines (Meurthe-et-Moselle).
POLIGNAC (Camille de), à Paris. S. P.
POUILLOT (J.), professeur à l'École normale de Cluny.
PUTZ (H.), chef d'escadrons d'Artillerie, à Paris.
RADAU (R.), à Paris.
RANCY (de), sous-directeur de l'*Aigle*, à Paris.
REINACH (de), banquier, à Paris.
RENAN, aide-astronome à l'Observatoire, à Paris.
RESAL, membre de l'Institut, à Paris.
REY, professeur à l'École du génie, à Arras.
RIBAUCOUR, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Draguignan.
RITTER (F.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Niort.
RODET, ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.
ROLLAND, membre de l'Institut, à Paris.
ROUART, ingénieur civil, à Paris.
ROUCHÉ (E.), professeur à l'École Centrale, à Paris.
ROUSSELIN (A.), professeur au lycée de Douai.

ROUX (François), architecte, à Paris.
SAINTE-CLAIRE-DEVILLE (Charles), membre de l'Institut, à Paris.
SAINT-CLAIRE DEVILLE (Henri), membre de l'Institut, à Paris.
SAINT-GERMAIN (A. de), docteur ès sciences, à Paris.
SAINT-LOUP, professeur à la Faculté des Sciences, à Besançon.
SALTEL, professeur au collège de Fontenay-le-Comte.
SARRAU, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
SARTIAUX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Senlis.
SCHÖNDORFFER, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, à Paris.
SCRIVANOFF (Grégoire), étudiant à l'Université de Saint-Petersbourg (Russie).
SERRET (J.-A.), membre de l'Institut, à Paris.
SERRET (Paul), docteur ès sciences, à Paris.
SIVERING, ingénieur en chef des Travaux publics, à Luxembourg (grand-duché de Luxembourg).
STEPHAN, directeur de l'Observatoire, à Marseille.
STUDNICKA, professeur à l'Université de Prague (Bohême).
TANNERY, ingénieur à la Manufacture des Tabacs, à Bordeaux.
TARATTE (E.), agrégé de l'Université, à Evreux.
TARBOURIECH, agrégé de l'Université, à Paris.
TERRIER, professeur de mathématiques, à Paris.
THÉRY, professeur au lycée de Douai.
TISSERAND, professeur à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
TISSOT, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Paris.
TOURNEUR (Paul), ingénieur, à Marnaval (Haute-Marne).
TRESCA (E.), ingénieur des Ponts et Chaussées, à Pontivy.
TURPAULT, à Paris.
TURQUAY, docteur ès sciences, à la Chapelle Saint-Mesmin (Loiret).
VACOSSIN, capitaine d'État-Major, à Paris.
VACQUANT, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, à Paris.
VAZEILLE, ancien élève de l'École Polytechnique, à Paris.
VINTEJOUX, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris.
VOLLOT (Jules), professeur au lycée d'Alger.
WELSCH, lieutenant d'Artillerie, à Saint-Omer.
WEYR (Édouard), étudiant à l'Université de Prague (Bohême).
WEYR (Dr Émile), professeur à l'École Polytechnique de Prague (Bohême).
WICKERSHEIM, élève-ingénieur des Mines, à Paris.

STATUTS DE LA SOCIÉTÉ

ARTICLE PREMIER. La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

ART. 2. Aucune communication ou discussion ne peut avoir lieu sur des objets étrangers aux mathématiques.

ART. 3. La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

ART. 4. Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont les suivantes : 1° être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée; 2° obtenir à l'une des séances suivantes les suffrages de la majorité des membres présents.

ART. 5. Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

ART. 6. L'administration de la Société est confiée à un conseil composé :

1° Des membres du bureau;

2° De douze autres membres résidents de la Société désignés par l'élection;

3° De quatre membres non résidents désignés par l'élection; ils auront voix délibérative dans le conseil lors de leur présence à Paris.

ART. 7. Le conseil est présidé par le président de la Société.

ART. 8. Le bureau est composé de :

1 président;

4 vice-présidents;

2 secrétaires;

2 vice-secrétaires;

1 trésorier;

1 archiviste.

ART. 9. Le président est élu pour un an.

Les vice-présidents sont nommés pour deux ans.

Deux d'entre eux sont remplacés chaque année.

Les secrétaires et les vice-secrétaires sont élus pour deux ans.

Le trésorier et l'archiviste pour trois ans.

ART. 10. Le président n'est pas rééligible immédiatement dans les mêmes fonctions.

ART. 11. Parmi les douze membres du conseil qui résident à Paris et qui ne font pas partie du bureau, quatre sont remplacés chaque année à tour de rôle.

ART. 12. Tous les membres de la Société sont appelés à participer à l'élection du président, soit directement, soit par correspondance.

ART. 13. Les autres membres du bureau et les membres du conseil sont élus à la majorité absolue des membres présents.

ART. 14. Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société ; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

ART. 15. La Société règle annuellement le budget de ses dépenses.

Dans la première séance de chaque année, le compte détaillé de recettes et dépenses de l'année révolue sera soumis à l'approbation de la Société ; ce compte rendu sera publié dans le *Bulletin*.

RÈGLEMENT ADMINISTRATIF

CHAPITRE PREMIER

CONDITIONS D'ADMISSION

1. Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont :

1° D'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ;

2° D'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents (art. 4 des statuts).

2. Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission montant à dix francs, et de la cotisation annuelle.

CHAPITRE II

TRAVAUX ET PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ

Tenue des séances.

3. La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois ; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

4. La première séance de janvier est consacrée spécialement aux élections pour le remplacement des membres sortant du bureau et du conseil.

5. Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Les membres sont convoqués à domicile pour les séances extraordinaires.

6. Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

7. La présence du président ou d'un vice-président, assisté d'un des secrétaires ou vice-secrétaires, suffit pour constituer le bureau à chaque séance.

8. En cas d'absence du président ou des vice-présidents, le trésorier, ou à son défaut l'archiviste, occupe le fauteuil.

En cas d'absence de tous les membres du bureau, les fonctions de président sont remplies par le plus âgé des membres du conseil présents à la séance.

En cas d'absence des secrétaires et vice-secrétaires, le président du jour désigne un des membres du conseil pour en remplir les fonctions.

9. Les procès-verbaux des séances sont rédigés dans l'intervalle d'une séance à l'autre.

Chaque séance commence par la lecture du procès-verbal de la séance précédente et de l'ordre du jour.

10. Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription ; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence qui seront appréciés par le bureau.

Les membres qui auront fait des communications verbales ou pris part aux discussions devront remettre des notes au secrétaire pour la rédaction du procès-verbal.

11. Dans les séances ordinaires, on ne peut traiter aucune question relative à l'administration, à moins d'une demande du conseil.

12. Toutes les observations relatives à l'administration sont adressées par écrit au président, qui en réfère au conseil, à sa plus prochaine réunion.

Bulletin.

13. La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

14. Les conventions stipulées entre le conseil de la Société et les éditeurs chargés de la publication du Bulletin devront être soumises à l'approbation de la Société.

Réimpression des ouvrages anciens et publication des mémoires originaux.

15. La Société, voulant concourir aux progrès des mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, des œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

La Société se réserve la faculté de publier les mémoires originaux trop étendus pour paraître dans le Bulletin.

16. Les publications émanant de la Société, autres que le Bulletin, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

CHAPITRE III

ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ.

17. Chaque élection a lieu au scrutin secret, sur un seul bulletin, et s'il est nécessaire, au moyen de deux tours, dont le second est de ballottage. Dans le cas d'égalité de voix, le plus âgé l'emporte.

18. L'élection du président seule donne lieu au vote de tous les membres résidents ou non résidents. Tout membre qui ne peut assister à la réunion électorale est invité à envoyer au secrétaire, avant la première séance de janvier, son suffrage individuel dans un bulletin cacheté et enfermé dans une lettre signée de lui.

Ce bulletin ne peut être ouvert qu'au moment du dépouillement du scrutin.

19. Les secrétaires ou, à leur défaut, les vice-secrétaires rédigent les procès-verbaux des séances de la Société et des séances du conseil.

20. Une commission d'impression, composée des secrétaires et de quatre membres nommés par le conseil, dirige la publication du Bulletin et l'impression des mémoires et communications.

21. Sous la direction du président, les secrétaires sont chargés de la correspondance pour ce qui concerne les travaux et les affaires de la Société autres que les affaires de finances : ils convoquent la Société, le conseil et les commissions quand il y a lieu, et préparent les ordres du jour.

22. La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

23. L'archiviste est chargé de la garde des archives de la Société; il en dresse un inventaire.

Il a sous sa direction la bibliothèque; il dresse le catalogue des livres et brochures imprimés, et tient un registre des manuscrits envoyés.

Enfin il a sous sa garde tous les documents appartenant à la Société.

24. Le trésorier est chargé du recouvrement des sommes dues à la Société.

25. Il tient un registre des recettes et dépenses, que tous les membres ont le droit de consulter.

26. Le trésorier ne peut faire aucun emploi extraordinaire des fonds de la Société sans une délibération spéciale du conseil.

Conseil et commissions.

27. Le président convoque le conseil toutes les fois que les affaires de la Société le réclament.

28. Il suffit d'une demande motivée signée par cinq membres du conseil et adressée au président, pour qu'une convocation du conseil soit obligatoire.

29. A chaque séance du conseil, les noms des membres présents sont consignés au procès-verbal.

30. Il faut au moins sept membres présents pour prendre des décisions en conseil.

31. Sur la proposition de cinq membres, le vote peut avoir lieu au scrutin secret.

32. Sur la demande de cinq membres, il peut être fait appel à la Société des décisions qui n'auraient pas été prises aux deux tiers des voix au sein du conseil.

33. Les procès-verbaux des séances du conseil doivent être transcrits sur

un registre coté et parafé par le secrétaire ; ils doivent être signés par le président et le secrétaire qui a tenu la plume ; les renvois doivent être parafés et les mots rayés approuvés.

34. Le conseil se réunit dans la dernière quinzaine de décembre pour examiner l'état des affaires de la Société, nommer la commission de comptabilité chargée de vérifier la gestion du trésorier, et la commission des archives chargée de vérifier celle de l'archiviste.

35. Ces deux commissions ne peuvent être composées de moins de trois membres ; elles font leur rapport dans la première séance de janvier.

36. Le conseil désigne annuellement, à la même époque, les membres qui, adjoints aux deux secrétaires, composent la commission permanente d'impression pour la publication du Bulletin et l'insertion des notes et mémoires des membres de la Société.

Cette commission veille à ce qu'il ne s'introduise dans les publications rien d'étranger à la science.

37. Les membres élus de la commission d'impression sont nommés pour trois ans.

Les membres de la commission d'impression peuvent être pris indistinctement dans la Société ou dans le conseil.

CHAPITRE IV

PROPRIÉTÉS, REVENUS ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ

38. Les versements des membres résidents et non résidents se composent :

1° Du droit d'admission, montant à 10 francs ;

2° De la cotisation annuelle.

39. Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

40. Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

41. Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

42. Tout membre qui n'aura pas acquitté la cotisation d'une année sera, après avertissement préalable du trésorier, considéré comme démissionnaire.

43. La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

44. Les dons faits à la Société sont inscrits au Bulletin des séances avec le nom des donateurs.

45. Les dépenses sont divisées en ordinaires et extraordinaires.

Les dépenses ordinaires se composent de frais de bureau et d'imprimés, ports de lettres, frais d'entretien, loyer du local, appointements des employés et frais d'impression du Bulletin. Le chiffre des dépenses ordinaires ne peut excéder les $\frac{9}{10}$ des ressources annuelles.

Les dépenses extraordinaires sont votées par la Société sur la proposition du conseil.

46. La Société ne s'engage jamais dans aucune dépense excédant son avoir.

CHAPITRE V

RÉVISION DES STATUTS CONSTITUTIFS OU DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF

47. Toute proposition de révision des statuts constitutifs ou du règlement administratif ne pourra être prise en considération que si elle est signée collectivement par vingt membres.

48. Le président fera, dans ce cas, procéder à un scrutin pour la nomination d'une commission de révision, qui sera composée de quatre membres du conseil et de trois membres pris en dehors.

49. La discussion du projet exigera la présence de la moitié plus un des membres résidant à Paris.

Tous les membres sont convoqués par lettres spéciales.

50. Si le nombre ci-dessus n'est pas atteint, la discussion aura lieu dans la séance suivante, quel que soit le nombre des membres présents.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

SÉANCE DU MERCREDI 11 NOVEMBRE 1874

PRÉSIDENT PAR M. RESAL

M. Fouret communique à la Société une note *Sur une propriété métrique des courbes algébriques.*

M. Halphen communique à la Société une note *Sur le contact des surfaces algébriques.*

M. Resal fait à la Société une communication *Sur la propriété dont jouit le pendule conique de révolution, dont un point de l'axe est fixe, de se mouvoir suivant la même loi que le pendule synchrone.*

M. Lemonnier communique à la Société une note *Sur la transformation des formes quadratiques.*

M. le comte Léopold Hugo fait à la Société une communication *Sur le rôle des polyèdres réguliers et de la sphère dans la numération décimale.*

SÉANCE DU MERCREDI 25 NOVEMBRE 1874

PRÉSIDENT PAR M. RESAL

M. Halphen analyse un mémoire de M. Sturm *Sur les caractéristiques des systèmes de courbes gauches en général, et des cubiques gauches en particulier.*

M. Darboux présente quelques observations au sujet de cette communication.

M. Jordan fait à la Société une communication *Sur le nombre de figures différentes que l'on peut construire avec un nombre donné de droites.*

M. Mannheim communique à la Société *Une construction, due à M. Hart, d'un appareil plus simple que celui de M. Peaucellier, pour obtenir le mouvement rectiligne d'un point, au moyen de tiges articulées.*

M. Mannheim indique, d'après M. Sylvester, la *Construction de deux systèmes articulés décrivant une conique au moyen de sept tiges.*

SÉANCE DU MERCREDI 9 DÉCEMBRE 1874

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

M. Jordan communique à la Société une *Solution générale de la détermination du minimum d'une somme de carrés de polynômes linéaires.*

M. Halphen fait à la Société une communication *Sur le contact maximum des surfaces d'un degré donné avec une surface quelconque.*

M. Mannheim communique à la Société un *Procédé pour décrire une anallagmatique du 4^{me} ordre, à l'aide d'un appareil à tiges articulées semblable à celui de M. Peaucellier, en remplaçant le losange par un quadrilatère à côtés inégaux, mais à diagonales rectangulaires.*

SÉANCE DU MERCREDI 23 DÉCEMBRE 1874

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Turpault (Claude), propriétaire, à Paris; Vacossin, capitaine d'état-major, professeur suppléant de topographie à l'École d'état-major, à Paris.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

SÉANCE DU MERCREDI 6 JANVIER 1875

PRÉSIDÉE PAR M. RESAL

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

Le secrétaire donne lecture de la liste des nouveaux membres présentés, ce sont :

MM. Rey (Casimir), professeur à l'École régimentaire du génie, à Arras ;
Berdellé, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

La Société procède, par la voie du scrutin, au remplacement des membres sortants du Bureau et du Conseil, qui se trouvent ainsi constitués :

Président honoraire	M. CHASLES.
Président.	M. BIENAYMÉ.
Vice-Présidents.	{ M. DE LA GOURNERIE. M. JORDAN. M. MANNHEIM. M. RESAL.
Secrétaires.	{ M. BRISSE. M. LAGUERRE.
Vice-Secrétaires.	{ M. FOURET. M. DE SAINT-GERMAIN.
Trésorier	M. ANDRÉ (Désiré).
Archiviste.	M. HOUBIGANT.
Membres du Conseil	{ M. BERTRAND. M. BONNET (Ossian). M. BOURGET. M. CHASLES. M. COLLIGNON. M. DARBOUX. M. HALPHEN. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. LEMONNIER. M. LEVY (Maurice). M. PAINVIN. M. SERRET (J.-A.).
Membres du Conseil non résidents.	{ M. Aoust (L'abbé). M. CLAYEUX. M. PARMENTIER. M. WEYR (Émile).

M. Fouret, au nom de la Commission des comptes, donne lecture de son rapport sur la gestion du trésorier.

La Société, adoptant les conclusions du rapporteur, vote des remerciements à M. Désiré André.

SÉANCE DU MERCREDI 20 JANVIER 1875

PRÉSIDÉE PAR M. DE LA GOURNERIE

Les membres présentés dans la dernière séance sont élus.

M. Halphen communique à la Société une *Démonstration analytique de*

deux relations, dues à M. Mannheim, entre les rayons de courbure en deux points correspondants des nappes de la développée d'une surface.

M. Fouret communique à la Société *Quelques considérations relatives aux systèmes de surfaces.*

M. de Saint-Germain communique à la Société une note *Sur la courbure des surfaces de carène.*

SÉANCE DU MERCREDI 3 FÉVRIER 1875

PRÉSIDÉE PAR M. DE LA GOURNERIE

Le secrétaire donne lecture, de la part de M. Saltel, de deux *Notes relatives aux courbes cycliques.*

M. Laguerre fait à la Société une communication *Sur les courbes du 3^{me} ordre.*

M. Halphen fait à la Société une communication *Sur un point de la théorie des surfaces.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Sur une propriété du polynôme $(x^2 - 1)^n$; par M. C. DE POLIGNAC.

(Séance du 17 juin 1874)

Dans ce qui va suivre, il sera fait appel à une propriété connue du polynôme $(x^2 - 1)^n$ que je commence par rappeler.

Elle consiste dans la relation identique suivante

$$(1) \quad n(n+1) \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} = (x^2-1) \frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}.$$

On la vérifiera aisément en la ramenant à une autre propriété bien connue du même polynôme à savoir que la n^{me} dérivée

$$y = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

satisfait identiquement à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(2) \quad (x^2-1) \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - n(n+1)y = 0.$$

En effet, en différentiant la relation (1), on tombera sur l'équation (2), dans laquelle on aurait fait $y = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$, c'est-à-dire sur un résultat identiquement nul. La dérivée de (1) est donc identiquement nulle et comme les deux membres s'annulent pour $x=1$ l'identité est démontrée.

J'aborde maintenant l'objet de cette étude. Posant, pour abrégé,

$$x^2 - 1 = X,$$

je partirai de la relation identique

$$X^n \log \frac{x+1}{x-1} = 2(x^2-1)^n \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \right).$$

Supposant le second membre développé et mettant en évidence la partie entière $f(x)$, on aura

$$X^n \log \frac{x+1}{x-1} = f(x) + \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha'}{x^3} + \dots$$

Si l'on prend la dérivée des deux membres, observant que

$$\frac{d \log \frac{x+1}{x-1}}{dx} = -\frac{2}{x^2-1} = -\frac{2}{X},$$

on sera conduit à l'égalité

$$(X^n)' \log \frac{x+1}{x-1} - 2X^{n-1} = f'(x) - \frac{\alpha}{x^2} - \dots;$$

et en continuant à prendre successivement les dérivées des deux membres, il est aisé de voir qu'on aura toujours une équation de la forme

$$(X^n)^{(h)} \log \frac{x+1}{x-1} + \varphi(x) = f^{(h)}(x) + \dots,$$

dans laquelle $\varphi(x)$ désigne un polynôme entier, si $h \leq n$. Cela tient à ce que la dérivée de $\log \frac{x+1}{x-1}$ est $-\frac{2}{X}$ et que les dérivées de X^n contiennent X en facteur jusqu'à la $n-1^{\text{ème}}$ incluse.

Je poserai en général

$$\varphi(x) = e_{n,h};$$

la nécessité du double indice apparaîtra plus loin. De même, remplaçant $f^{(h)}(x)$ par $f_n^{(h)}$, je formerai le tableau suivant

d'où, conservant la même notation abrégée,

$$V_n = E_n + F_n.$$

La relation à démontrer s'exprimera donc par l'identité

$$V_n = 0.$$

Cette dernière résultera de l'examen de deux formes différentes qu'on peut donner à la quantité $v_{n,h}$. Remarquons d'abord qu'il résulte immédiatement du mode de formation du tableau (3) que

$$(5) \quad e_{n,h+1} = e'_{n,h} - \frac{2(X^n)^{(h)}}{X};$$

d'ailleurs on peut écrire

$$f_n^{(h+1)} = (f_n^{(h)})';$$

ajoutant, il vient

$$(6) \quad v_{n,h+1} = v'_{n,h} - \frac{2(X^n)^{(h)}}{X}.$$

Il est important d'observer que les relations (5) et (6) subsistent pour $h > n$, bien que les polynômes e et v cessent d'être entiers.

Après avoir fait varier h , je ferai varier n , et je chercherai d'abord ce que devient $f_n^{(h)}$ quand n se change en $n+1$. On a par définition

$$X^n \log \frac{x+1}{x-1} = f_n + \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha'}{x^2} + \dots,$$

d'où

$$X^{n+1} \log \frac{x+1}{x-1} = Xf_n + \frac{\alpha X}{x} + \frac{\alpha' X}{x^2} + \dots = Xf_n + \alpha x + \frac{\alpha}{x} + \dots$$

Donc

$$f_{n+1} = Xf_n + \alpha x,$$

et par suite

$$f_{n+1}^{(h)} = (Xf_n)^{(h)} \text{ pour } h \geq 2.$$

Développant et observant que $X^n = 2$, il vient

$$(7) \quad f_{n+1}^{(h)} = Xf_n^{(h)} + hXf_n^{(h-1)} + h(h-1)f_n^{(h-2)}.$$

On aura une formule toute semblable pour $e_{n+1,h}$. En effet, on a par définition

$$\left(X^n \log \frac{x+1}{x-1} \right)^{(h)} = (X^n)^{(h)} \log \frac{x+1}{x-1} + e_{n,h};$$

d'ailleurs

$$X^{n+1} \log \frac{x+1}{x-1} = XX^n \log \frac{x+1}{x-1};$$

d'où

$$\begin{aligned} \left(X^{n+1} \log \frac{x+1}{x-1} \right)^{(h)} &= X \left(X^n \log \frac{x+1}{x-1} \right)^{(h)} + hX' \left(X^n \log \frac{x+1}{x-1} \right)^{(h-1)} \\ &\quad + h(h-1) \left(X^n \log \frac{x+1}{x-1} \right)^{(h-2)} \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} (X^{n+1})^{(h)} \log \frac{x+1}{x-1} + e_{n+1,h} &= X \left[(X^n)^{(h)} \log \frac{x+1}{x-1} + e_{n,h} \right] \\ &\quad + hX' \left[(X^n)^{(h-1)} \log \frac{x+1}{x-1} + e_{n,h-1} \right] \\ &\quad + h(h-1) \left[(X^n)^{(h-2)} \log \frac{x+1}{x-1} + e_{n,h-2} \right], \end{aligned}$$

d'où

$$(8) \quad e_{n+1,h} = Xe_{n,h} + hX'e_{n,h-1} + h(h-1)e_{n,h-2}.$$

Ajoutant les relations (7) et (8), on obtient

$$(9) \quad v_{n+1,h} = Xv_{n,h} + hX'v_{n,h-1} + h(h-1)v_{n,h-2}.$$

Avant d'aller plus loin, remarquons que les quantités f sont toujours entières. Les quantités e ne le sont que tant que le second indice ne dépasse pas le premier. Mais, d'après le développement même du calcul, la formule (8) subsiste sans restriction. La formule (7) n'a d'autre restriction que $h > 1$. Il en est donc de même de la formule (9). En y faisant $h = n+1$, on obtient

$$V_{n+1} = Xv_{n,n+1} + (n+1)X'V_n + n(n+1)v_{n,n-1}.$$

Mais de la formule (6) on tire, pour $h = n$,

$$v_{n,n+1} = V'_n - \frac{2(X^n)^n}{X}.$$

On aura donc

$$(10) \quad V_{n+1} = XV'_n + (n+1)X'V_n + n(n+1)v_{n,n-1} - 2(X^n)^n.$$

Prenant la dérivée

$$V'_{n+1} = XV'_n + (n+2)X'V'_n + 2(n+1)V_n + n(n+1)v'_{n,n-1} - 2(X^n)^{n+1}.$$

Mais la relation (6) donne, pour $h = n-1$,

$$V_n = v'_{n,n-1} - \frac{2(X^n)^{n-1}}{X};$$

par conséquent

$$V'_{n+1} = XV'_n + (n+2)XV'_n + (n+1)(n+2)V_n + 2\left[n(n+1)\frac{(X^n)^{(n-1)}}{X} - (X^n)^{(n+1)}\right].$$

Les deux derniers termes disparaissent en vertu de la relation fondamentale (1), qui dans la notation actuelle serait

$$n(n+1)(X^n)^{(n-1)} = X(X^n)^{(n+1)},$$

et il reste finalement

$$(11) \quad V'_{n+1} = XV'_n + (n+2)XV'_n + (n+1)(n+2)V_n.$$

Cette formule va nous mener au but que nous poursuivons, à savoir : de démontrer que toutes les quantités V sont identiquement nulles. Je remarque d'abord que si $V_n = 0$ identiquement, on aura identiquement aussi $V'_{n+1} = 0$. Donc, dans ce cas, V_{n+1} ne peut être qu'une constante, et je vais montrer que cette constante est nulle.

L'hypothèse $V_n = 0$ introduite dans la valeur générale de V_{n+1} , formule (10), donne

$$(11 a) \quad V_{n+1} = n(n+1)v_{n,n-1} - 2(X^n)^{(n)},$$

et comme V_{n+1} ne peut être qu'une constante, il suffira de démontrer que le second membre s'annule pour une valeur particulière de x ; soit $x = 1$.

On peut écrire par définition

$$(12) \quad V_{n+1} = n(n+1)(e_{n,n-1} + f_n^{(n-1)}) - 2(X^n)^{(n)}.$$

Ici se place une remarque importante relativement aux quantités e .

Dans la formule (5)

$$e_{n,h+1} = e'_{n,h} - \frac{2(X^n)^{(h)}}{X},$$

le terme $\frac{(X^n)^{(h)}}{X}$ contient $n-h-1$ fois le facteur X . Il en sera donc de même de $e_{n,h+1}$, si $e'_{n,h}$ contient X le même nombre de fois. Mais, pour cela, il suffit que $e_{n,h}$ contienne $n-h$ fois X . Or

$$e_{n,h} = e'_{n,h-1} - \frac{2(X^n)^{(h-1)}}{X};$$

le second terme du second membre contient $n-h$ fois X , il suffira donc encore que $e_{n,h-1}$ le contienne $n-h+1$ fois et, en continuant ainsi, on ramènera la première condition à la seule question de savoir si $e_{n,1}$ contient $n-1$ fois le facteur X . C'est ce qui a lieu, puisque

$$e_{n,1} = -2X^{n-1}.$$

Donc, en général, $e_{n,h+1}$ contiendra $n - h - 1$ fois le facteur X . Faisant $h = n - 2$, on voit que $e_{n,n-1}$ contiendra une fois le facteur X ; $e_{n,n-1}$ s'annulera donc pour $x = 1$. Par suite, on tire de (12), pour $x = 1$,

$$V_{n+1} = n(n+1)f_n^{(n-1)} - 2(X^n)^{(n)}.$$

D'ailleurs, conservant une notation antérieure,

$$\varepsilon_{n,n-1} + e_{n,n-1} = f_n^{(n-1)},$$

et, pour $x = 1$,

$$\varepsilon_{n,n-1} = f_n^{(n-1)}.$$

On aura donc en définitive, pour $x = 1$,

$$V_{n+1} = n(n+1)\varepsilon_{n,n-1} - 2(X^n)^{(n)}.$$

Pour vérifier que le second membre est nul, il sera suffisant de supposer n pair. Car si n est impair, comme $\varepsilon_{n,n-1}$ et $(X^n)^{(n)}$ ne contiennent que des puissances impaires de x , ces deux quantités s'annuleront pour $x = 0$. Soit donc n pair et posons

$$(X^n)^{(n-1)} = a_0 x^{n+1} + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-3} + \dots + (-1)^p a_p x^{n-(2p-1)} + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}} x,$$

d'où

$$\begin{aligned} (X^n)^{(n)} &= (n+1)a_0 x^n - (n-1)a_1 x^{n-2} + (n-3)a_2 x^{n-4} \\ &\quad + \dots + (-1)^p [n - (2p-1)] a_p x^{n-2p} + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}}, \\ (X^n)^{(n+1)} &= n(n+1)a_0 x^{n-1} - (n-1)(n-2)a_1 x^{n-3} + (n-3)(n-4)a_2 x^{n-5} \\ &\quad + \dots + (-1)^p (n-2p+1)(n-2p)a_p x^{n-2p-1} + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}-1} 2.5a_{\frac{n}{2}-1}. \end{aligned}$$

En développant l'identité

$$n(n+1)(X^n)^{(n-1)} = (x^2 - 1)(X^n)^{(n+1)},$$

on sera conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} n(n+1)a_0 &= n(n+1)a_0 \quad (-1)^0, \\ n(n+1)a_0 + (n-1)(n-2)a_1 &= n(n+1)a_1 \quad (-1)^1, \\ (n-1)(n-2)a_1 + (n-3)(n-4)a_2 &= n(n+1)a_2 \quad (-1)^2, \\ &\dots \dots \dots \\ (n-2p+3)(n-2p+2)a_{p-1} + (n-2p+1)(n-2p)a_p &= n(n+1)a_p \quad (-1)^p. \end{aligned}$$

En les multipliant respectivement par les puissances de -1 placées en regard et ajoutant, on aura

$$(15) \quad (-1)^p (n-2p+1)(n-2p)a_p = n(n+1)[a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^p a_p].$$

Or, en égalant les termes généraux des équations (14) et (15), c'est-à-dire les coefficients de a'' et de $\frac{1}{n-2p+1}$, on tombe sur l'équation (13).

Donc on a identiquement

$$n(n+1)e_{n,n-1} = 2(X^n)^{(n)} \text{ pour } x=1,$$

d'où résulte enfin

$$V_{n+1} = 0,$$

si $V_n = 0$ identiquement. Or ce résultat est facile à vérifier pour $n=2$; donc la proposition est générale.

En se reportant à l'équation (14 a), on voit qu'il résulte de l'analyse précédente que l'on a identiquement

$$2(X^n)^{(n)} = n(n+1)v_{n,n-1} = n(n+1)(e_{n,n-1} + f_n^{(n-1)}).$$

La $n^{\text{ème}}$ dérivée de $(x^2-1)^n$ jouit, comme on sait, d'une propriété caractéristique qui est de donner une approximation de la transcendante $\log \frac{x+1}{x-1}$ au moyen d'une fraction rationnelle dont elle est le dénominateur (*). En se reportant au tableau (3), on voit que le numérateur de cette fraction rationnelle n'est autre que $2F_n$. La dernière équation de ce tableau donne, ayant égard à la proposition démontrée,

$$(X^n)^{(n)} \log \frac{x+1}{x-1} = 2F_n + \sigma^{(n)}.$$

$$\log \frac{x+1}{x-1} = \frac{2F_n}{(X^n)^{(n)}} + \frac{\sigma^{(n)}}{(X^n)^{(n)}},$$

ou, en développant le second terme,

$$\log \frac{x+1}{x-1} = \frac{2F_n}{(X^n)^{(n)}} + \frac{\alpha}{x^{2n+1}} + \frac{x_1}{x^{2n+3}} + \dots,$$

équation dans laquelle $F_n = \frac{d^n f_n}{dx^n}$ c'est-à-dire la $n^{\text{ème}}$ dérivée de la partie entière du produit

$$(x^2-1)^n 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \right).$$

Tous ces résultats s'appliqueront identiquement au produit

$$(x^2+1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{x}.$$

Il suffira de changer x en $x\sqrt{-1}$.

(*) La théorie en est exposée dans le *Cours d'analyse* de M. Hermite, p. 277.

Sur le contact des surfaces; par M. HALPHEN.

(Séance du 9 décembre 1874)

1. On a jusqu'à présent accordé peu d'attention aux questions qui concernent le contact des surfaces quelconques avec les surfaces algébriques. Plusieurs sont cependant dignes d'intérêt : on en jugera peut-être ainsi de celle qui a donné lieu au présent travail. Peu de mots suffiront pour en faire connaître l'origine.

Le contact d'ordre n entre deux surfaces, S , Σ , dont l'une est supposée donnée ainsi que le point de contact, exige, comme on sait,

$N_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ conditions. Donc : 1° si l'autre surface, Σ , renferme M

arbitraires, on peut en disposer de manière à élever l'ordre du contact jusqu'à la plus grande valeur de n qui laisse N_n non supérieur à M ; 2° pour que le contact puisse s'élever à l'ordre immédiatement supérieur ($n+1$), il faut que le point de contact satisfasse à $(N_{n+1} - M)$ conditions.

Cette proposition, à laquelle on borne le plus souvent cette partie de la théorie du contact, souffre, dans un des cas les plus simples, une exception remarquable signalée dans le *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, par M. Hermite. Il s'agit du cas où Σ est une surface arbitraire du second degré. Le nombre M est ici égal à 9. Conformément à ce qui vient d'être rappelé, le maximum de n est égal à 2. Mais la seconde partie de la conclusion cesse d'être exacte. Le contact devrait pouvoir s'élever au 3^{ème} ordre en des points satisfaisant à une condition sur la surface donnée. Il n'en est rien : les points dont il s'agit satisfont à deux conditions. Ils sont donc en nombre fini. De plus, en chacun d'eux, il existe un faisceau de surfaces du second degré ayant avec la proposée un contact du 3^{ème} ordre.

Cette exception est-elle un fait isolé, ou a-t-elle lieu dans d'autres cas ? Telle est la question qui s'offre ici. Je prouverai qu'une exception analogue a lieu dans le cas où la surface arbitraire est du 3^{ème}, du 4^{ème} ou du 5^{ème} degré, et qu'il n'en existe point pour les surfaces de degré supérieur.

2. Voici d'abord une remarque des plus simples, qui donne une première indication sur le sujet dont il s'agit. Soit $\Sigma = 0$ l'équation d'une surface, et $T = 0$ celle de son plan tangent en un point a . Soit λ une constante arbitraire. Les surfaces du faisceau $\Sigma + \lambda T^m = 0$ ont manifestement, en a , avec Σ , un contact d'ordre $(2m-1)$. Si, en effet, on substitue aux coordonnées, dans l'équation du faisceau, celles d'un point de Σ , à distance infiniment petite du 1^{er} ordre de a , Σ s'évanouit, et T est du 2^{ème} ordre. Donc $\Sigma + \lambda T^m$ est infiniment petit d'ordre $2m$. Donc le contact est bien d'ordre $(2m-1)$.

Supposons maintenant que Σ soit du degré m . Nous avons formé, de la

sorte, en un point arbitraire a de Σ , un faisceau de surfaces du même degré, ayant avec la proposée un contact d'ordre $(2m-1)$. Donc :

Si, en un point d'une surface, il existe une surface de degré m , ayant avec la proposée, un contact d'ordre non supérieur à $(2m-1)$, il en existe une infinité.

Si, comme je l'ai rappelé plus haut, on calcule le maximum de n relatif à une surface arbitraire de degré m , on trouve, pour $m = 2, 3$ ou 4 , que ce maximum est $(2m-2)$, c'est-à-dire $2, 4$ ou 6 .

Par conséquent, un contact d'ordre $3, 5$ ou 7 , en un point d'ordre $(2m-1)$, est exceptionnel. La remarque précédente nous avertit donc que, si ce contact exceptionnel a lieu, en un point d'une surface S , à l'égard d'une surface de degré $2, 3$ ou 4 , il a également lieu à l'égard d'une infinité de paires de surfaces.

Le maximum de n , calculé de même pour le cas où $m = 5$, est égal à 9 . Ici le nombre N_0 des conditions est précisément le même que celui des arbitraires, à savoir 55 . On croirait donc qu'en chaque point d'une surface S , il existe une surface du $5^{\text{ème}}$ degré ayant avec S un contact du $9^{\text{ème}}$ ordre. Je dis *une* à cause de la forme linéaire des équations qui servent à déterminer la surface. Mais, d'après la remarque ci-dessus, s'il en existe une, il en existe une infinité. Voilà donc encore une exception à la théorie générale ; et celle-là est un peu différente des précédentes.

Pour les valeurs de m supérieures à 5 , le maximum de n , calculé de même, est, on le prouve aisément, supérieur à $(2m-1)$. La remarque ci-dessus cesse alors d'être utile.

Les indications précédentes ne suffisent pas pour résoudre les questions proposées. Une étude plus approfondie est nécessaire. Avant de l'aborder, je ferai remarquer que cet ordre de recherches peut être envisagé d'un point de vue, au premier abord, différent.

3. Soit, comme plus haut, Σ une surface à M arbitraires, et n l'ordre le plus élevé du contact que ces arbitraires permettent d'établir entre Σ et une surface donnée S en un point donné. Pour que l'ordre de ce contact puisse s'élever à $(n+1)$, il faut que le point de contact satisfasse à des conditions qui se traduisent par des relations entre les coordonnées et les dérivées partielles prises sur S . Or il est manifeste que ces relations ne sont autre chose que les équations aux dérivées partielles du groupe de surfaces Σ ; c'est-à-dire les équations qu'on obtient en différentiant l'équation de Σ jusqu'à l'ordre minimum qui permette l'élimination de toutes les arbitraires, et en faisant cette élimination.

Cette double interprétation des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes est un fait général en analyse, et sur lequel je pourrai revenir dans une autre occasion. Dans tous les cas de la théorie du contact, elle est immédiatement évidente. Par exemple, l'équation aux dé-

rivées partielles des surfaces réglées, considérée comme définissant un lieu de points sur une surface donnée, y définit le lieu des points de contact des droites surosculatrices, c'est-à-dire ayant avec la surface un contact du 3^{ème} ordre.

La considération de ce lieu, qui s'offre ici comme un exemple, fournit une explication simple de l'exception relative au contact des surfaces du second degré. Je l'indique en passant. Soit P cette courbe. Si, en un point p d'une surface S, il existe une surface Σ du 2^{ème} degré ayant avec S un contact du 3^{ème} ordre, les droites de Σ , qui passent en p, ont avec S un contact de ce même ordre. Le point p appartient donc doublement à la ligne P; il en est un point double. Il n'y a donc qu'un nombre fini de tels points. Ainsi :

Les points d'une surface S, en lesquels il existe des surfaces du 2^{ème} degré ayant avec S un contact du 3^{ème} ordre sont des points doubles du lieu des points de contact de S avec ses droites surosculatrices.

La réciproque de cette proposition est exacte, comme on le verra plus loin.

J'arrive maintenant à la question générale, qui peut être ainsi posée : *Quelles sont les équations aux dérivées partielles d'ordre minimum, ne contenant aucune constante arbitraire, auxquelles satisfont les surfaces de degré m ?*

4. Les surfaces de degré m contiennent un nombre M d'arbitraires, marqué par

$$M = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1.$$

J'en prends une passant à l'origine O des coordonnées, et y touchant le plan des xy. Elle contient (M—3) arbitraires, et satisfait à 3 équations, à savoir, pour $x=0, y=0$,

$$(1) \quad z=0, \quad \frac{dz}{dx}=0, \quad \frac{dz}{dy}=0.$$

Formons les dérivées partielles de z, au point O, jusqu'à l'ordre minimum qui permette l'élimination des (M—3) arbitraires, et faisons cette élimination. Nous obtenons ainsi des équations :

$$(2) \quad 0=0, \quad 0_1=0, \quad \dots,$$

entre les dérivées partielles considérées. Ces équations, à cause de (1), ne contiennent ni les coordonnées, ni les dérivées partielles du 1^{er} ordre.

Je dis que les équations (2) sont précisément les équations aux dérivées partielles des surfaces de degré m, que je cherche.

Changeons, en effet, de coordonnées, en posant :

$$(3) \quad a+x=X, \quad b+y=Y, \quad c+px+qy+z=Z.$$

Tirons de ces équations x, y, z et remplaçons ces variables par leurs expressions dans (1) et (2). Il est clair que les équations (2) ne changent pas, sauf que x, y, z sont remplacées par les lettres X, Y, Z . Quant aux équations (1), elles deviennent, pour $X = a, Y = b$,

$$(4) \quad Z = c, \quad \frac{dZ}{dx} = p, \quad \frac{dZ}{dy} = q.$$

Les équations (2) et (4) conviennent donc aux surfaces de degré m , passant au point $X = a, Y = b, Z = c$, et y touchant le plan

$$Z - c = p(X - a) + q(Y - b).$$

Il suffira d'éliminer les constantes arbitraires a, b, c, p, q pour avoir les équations qui conviennent à toutes les surfaces de degré m . Ces équations se réduisent donc aux équations (2). Ce qu'il fallait démontrer.

Donc, premier résultat : *les équations aux dérivées partielles des surfaces d'un degré donné, ne contiennent ni les coordonnées, ni les dérivées partielles du 1^{er} ordre.*

Ce résultat s'applique également à toute famille de surfaces, telle qu'on puisse mener une d'elles par un point quelconque, de manière à y toucher un plan quelconque. Dans ce cas général, comme dans celui qui nous occupe, on peut, pour former les équations, supposer la surface passant à l'origine des coordonnées et y touchant le plan des xy .

Dans cette hypothèse, si un terme de l'équation de la surface est de la forme $Az^py^qx^r$, et que x et y soient infiniment petits du 1^{er} ordre, ce terme est lui-même infiniment petit d'ordre $(r + q + 2p)$. Comme les dérivées partielles de z sont, à des facteurs numériques près, les coefficients du développement de z suivant les puissances croissantes de x et y , on voit que le terme considéré n'a aucune influence sur les dérivées partielles d'ordre inférieur à $(r + q + 2p)$.

Ainsi, dans le cas du 2^{ème} degré, le terme en z^3 n'a pas d'influence sur les dérivées partielles d'ordre inférieur à 4. Les 7 dérivées du 2^{ème} et du 3^{ème} ordre dépendent donc simplement de 5, et non pas de 6 arbitraires ($M - 3 = 6$). *Donc il y a au moins deux équations du 3^{ème} ordre.*

Pour le 3^{ème} degré, le terme en z^3 n'intervient pas dans le calcul des dérivées avant le 6^{ème} ordre. Les 18 dérivées du 2^{ème} au 5^{ème} ordre dépendent donc de 15 et non de 16 coefficients ($M - 3 = 16$). *Donc au moins trois équations du 5^{ème} ordre.*

Pour le 4^{ème} degré, le terme en z^4 n'intervient pas dans le calcul des dérivées avant le 8^{ème} ordre. Les 33 dérivées du 2^{ème} au 7^{ème} ordre dépendent donc de 30, et non de 31 coefficients ($M - 3 = 31$). *Donc encore au moins trois équations du 7^{ème} ordre.*

Pour le 5^{ème} degré, le terme en z^5 n'intervient pas dans le calcul des déri-

vées avant le 10^{ème} ordre. Les 52 dérivées du 2^{ème} au 9^{ème} ordre dépendent donc de 51 et non de 52 coefficients ($M - 3 = 52$). Il y a donc au moins une équation du 9^{ème} ordre.

Là s'arrête l'application de cette nouvelle remarque. Elle ne diffère pas essentiellement de celle qui a été faite plus haut, n° 2. Elle la complète et fait prévoir les résultats du calcul dont je vais m'occuper.

5. Je considère une surface passant à l'origine des coordonnées et y touchant le plan des xy , conformément à une remarque du numéro précédent. Soit

$$(5) \quad z = S_2 + S_3 + S_4 + \dots$$

le développement de z suivant les puissances croissantes de x et y . Je désigne ici par S_k un polynôme homogène en x, y , de degré k . Ses coefficients sont, à des facteurs numériques près, les dérivées partielles d'ordre k .

Je représente de même par une lettre tout polynôme homogène en x, y , en indiquant son degré par l'indice inférieur, en sorte que :

$$(6) \quad T^{(k)} = t_0^{(k)} + t_1^{(k)} + t_2^{(k)} + \dots + t_k^{(k)}$$

est un polynôme quelconque en x, y , de degré k . D'après ces définitions, les symboles $t_{k+1}^{(k)}, t_{k+2}^{(k)}, \dots$ sont nuls.

L'équation d'une surface de degré m , d'après ces conventions, pourra s'écrire :

$$(7) \quad T^{(m)} + T^{(m-1)}z + T^{(m-2)}z^2 + \dots + T^{(1)}z^{m-1} + T^{(0)}z^m = 0.$$

On obtiendra toutes les relations entre les dérivées partielles de z et les coefficients de (7) en écrivant que l'expression (6), mise à la place de z dans (7), fournit une identité.

Je forme les termes par degrés successifs croissants. J'ai ainsi :

$$(8) \quad t_0^{(m)} = 0, \quad t_1^{(m)} = 0,$$

$$(9) \quad \begin{cases} t_2^{(m)} + t_0^{(m-1)}S_2 = 0, \\ t_3^{(m)} + t_0^{(m-1)}S_3 + t_1^{(m-1)}S_2 = 0, \\ t_4^{(m)} + t_0^{(m-1)}S_4 + t_1^{(m-1)}S_3 + t_2^{(m-1)}S_2 + t_0^{(m-2)}S_2^2 = 0, \\ t_5^{(m)} + t_0^{(m-1)}S_5 + t_1^{(m-1)}S_4 + t_2^{(m-1)}S_3 + t_3^{(m-1)}S_2 + 2t_0^{(m-2)}S_2S_3 + t_1^{(m-2)}S_2^2 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Pour appliquer ces équations, je suppose d'abord $m = 2$. Alors $t_5^{(m)}$ est nul. Le seconde des équations (9) indique que S_3 est divisible par S_2 . Donc :

Les surfaces du 2^{ème} degré satisfont à deux équations aux dérivées partielles du 3^{ème} ordre que l'on obtient en écrivant que le polynôme du 3^{ème} degré en z

$$A = z^3 \frac{d^3z}{dx^3} + 3z^2 \frac{d^2z}{dx^2dy} + 3z \frac{dz}{dx dy^2} + \frac{d^3z}{dy^3}$$

est divisible par le polynôme du 2^{ème} degré

$$B = \alpha^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2\alpha \frac{d^2 z}{dx dy} + \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

Ce sont précisément les conditions, indiquées par M. Hermite, pour la possibilité du contact du 3^{ème} ordre entre une surface et une surface du second degré.

Les équations (9) sont évidemment susceptibles elles-mêmes de la double interprétation signalée plus haut, n° 3. On y peut considérer les coefficients des polynômes S comme donnés. Les équations servent alors à déterminer la surface (7) de manière à ce qu'elle ait avec la surface (5) un contact d'ordre égal au degré de celle des équations (9) à laquelle on s'arrête.

Si donc on suppose que S_3 soit donné, divisible par S_2 , les équations (8) et les deux premières des équations (9) déterminent, dans l'hypothèse $m=2$, un faisceau de surfaces du 2^{ème} degré, de la forme $z + \lambda z^2 = 0$, qui ont avec la surface proposée, en O, un contact du 3^{ème} ordre.

6. Quelques mots encore au sujet du contact des surfaces du 2^{ème} degré. L'équation d'une surface étant mise sous la forme du développement (5), les points d'intersection de cette surface et du plan des xy doivent vérifier la relation

$$(10) \quad 0 = S_2 + S_3 + S_4 + \dots$$

S'il arrive que la courbe, lieu de ces points, se compose de plusieurs lignes distinctes, et que $Q=0$ soit l'équation, sous forme entière, de l'une d'elles, le second membre de (10) est divisible par Q.

Ce fait se présente dans le cas d'une surface réglée. Pour la génératrice rectiligne qui passe en O, Q est linéaire et homogène. C'est un des deux facteurs de S_2 . Le second membre de (10) étant divisible par ce facteur, il en est ainsi de S_3 . Par suite, on obtient, comme on le sait d'ailleurs, l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées en écrivant que le polynôme A, du numéro précédent, a un facteur commun avec le polynôme B.

Que l'on se reporte au résultat du numéro précédent, et l'on voit que les deux équations aux dérivées partielles des surfaces du 2^{ème} degré expriment la double génération rectiligne de ces surfaces. Comme conséquence, l'équation du 2^{ème} degré à trois variables en est la solution générale.

Au point de vue de la théorie du contact, les points d'une surface, en lesquels les polynômes A et B ont un facteur commun, sont les points de contact des droites suroscultrices; ils forment ce que j'ai désigné précédemment par la ligne P. D'ailleurs, nous venons de trouver que les points où A et B ont deux facteurs communs sont ceux où le contact du 3^{ème} ordre avec une surface du 2^{ème} degré est possible, et inversement. Nous retrouvons

vons donc par le calcul que ces points sont doubles sur la ligne P, et aussi la proposition réciproque.

7. J'applique maintenant les équations du n° 5 au cas où $m=3$. Ici $t_4^{(m)}, t_5^{(m)}, t_3^{(m-1)}$ sont nuls. La 3^{ème} des équations (9), si l'on y fait $t_0^{(2)}=1$, ce qui est permis, devient

$$S_4 + t_1^{(2)}S_2 + (t_2^{(2)} + t_0^{(1)}S_2)S_2 = 0. \quad (11)$$

Je dis qu'on en peut déduire aisément les polynômes $t_1^{(2)}$ et $t_2^{(2)} + t_0^{(1)}S_2$.

A cet effet, je considère la fraction rationnelle $\frac{S_4}{S_2}$ en y supposant que le rapport $\frac{x}{y}$ soit remplacé, dans cette fraction, par une racine de $S_2 = 0$. A ce point de vue, la fonction rationnelle peut être réduite à un polynôme du 1^{er} degré homogène en x, y , dont les coefficients s'expriment rationnellement par ceux de S_4, S_3, S_1 . La définition de ce polynôme A_1 peut être appelée abrégativement par la relation

$$A_1 \equiv \frac{S_4}{S_2} \pmod{S_2}. \quad (12)$$

Sans autre explication, on comprend de même quel est le polynôme A_2 du second degré, homogène en x, y , qui est défini par

$$A_2 \equiv \frac{S_4}{S_2} \pmod{S_2}. \quad (13)$$

Le polynôme $A_1S_3 + A_2S_2$, qui est, comme S_4 , du 4^{ème} degré, lui est égal pour 5 valeurs distinctes de la variable $\frac{x}{y}$, à savoir les racines de S_2 et de S_3 . C'est donc précisément S_4 . On en conclura aisément que la solution de l'équation (11) est donnée par

$$t_1^{(2)} = -A_1, \quad t_2^{(2)} + t_0^{(1)}S_2 = -A_2. \quad (14)$$

La 4^{ème} des équations (9) devient maintenant

$$S_5 - A_1S_4 - A_2S_3 + (t_0^{(1)}S_3 + t_1^{(1)}S_2)S_2 = 0. \quad (15)$$

Désignons par B_5 le polynôme

$$B_5 = S_5 - A_1S_4 - A_2S_3,$$

dont les coefficients sont exprimables rationnellement par ceux de S_5, S_3, S_4 et S_2 . L'équation (15) exprime 3 conditions :

1° B_5 est divisible par S_2 ; ce qui donne 2 équations.

2° Le quotient $\frac{B_5}{S_2}$ est de la forme $\alpha S_3 + \beta S_2$, α et β étant une constante et un polynôme du 1^{er} degré, indéterminés, ce qui donne une équation.

Il s'agit de former cette dernière équation.

Je dénote par un accent les dérivées prises par rapport à la variable $\frac{x}{y}$, les coefficients des polynômes étant, bien entendu, considérés comme constants.

Puisque B_s est divisible par S_2 , j'ai

$$\frac{B_s}{S_2} \equiv \frac{B'_s}{S'_2} \pmod{S_2}.$$

Soit donc

$$(16) \quad \frac{B'_s}{S'_2} \equiv y^2(ax + by) \pmod{S_2},$$

$$(17) \quad S_s \equiv y^2(cx + ey) \pmod{S_2}.$$

On verra sans peine que l'équation cherchée est

$$(18) \quad ax - bc = 0,$$

a, b, c, e étant, comme l'indiquent les relations (16) et (17), exprimables rationnellement en fonction des dérivées partielles du 2^{ème} au 5^{ème} ordre.

S_2 Ainsi : En joignant à l'équation (18) celles qu'on obtient en exprimant que B_s est divisible par S_2 , on a les trois équations aux dérivées partielles du 5^{ème} ordre des surfaces du 3^{ème} degré.

A un autre point de vue, ces trois équations expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'en un point d'une surface, le contact avec une surface du 3^{ème} degré puisse s'élever au 5^{ème} ordre. Quand elles sont satisfaites en un point, il existe en ce point un faisceau de telles surfaces du 3^{ème} degré.

Pour cette dernière partie, on voit, en effet, que les équations considérées, jointes aux deux premières équations (9) et à (8), déterminent tous les coefficients de l'équation du 3^{ème} degré, sauf celui du terme en x^5 . Les surfaces cherchées sont donc de la forme $\Sigma + \lambda x^5 = 0$.

8. Considérons maintenant les équations (9) dans le cas général. Nous les distinguons en deux groupes : en premier lieu, la série des premières jusqu'à celle qui commence par le terme $t_m^{(m)}$, inclusivement. Les équations de ce groupe serviront à déterminer

$$T^{(m)} = t_0^{(m)} + t_1^{(m)} + t_2^{(m)} + \dots + t_m^{(m)},$$

quand les autres polynômes t auront été déterminés par les équations suivantes, qui forment le second groupe.

C'est seulement ce second groupe, qui ne contient pas les polynômes $t^{(m)}$, qui servira à trouver les équations aux dérivées partielles cherchées. C'est ainsi que le calcul a été fait dans les deux cas précédents.

Ainsi, par cette voie, tous les coefficients de $T^{(m)}$, au nombre de $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$, sont immédiatement éliminés. Les équations qui subsistent,

et dont les degrés, par rapport à $\frac{x}{y}$, vont en croissant, commencent au degré $(m+1)$. Chacune d'elles fournit des équations distinctes, indé-

pendantes de x et y , en nombre égal à son degré en $\frac{x}{y}$. Ces équations sont

d'ailleurs linéaires et homogènes par rapport aux coefficients des polynômes t , qu'il s'agit d'éliminer. Dès que leur nombre permettra l'élimination complète, cette élimination fournira les équations aux dérivées partielles que l'on cherche.

Pour le 4^{ème} et le 5^{ème} degré, conformément à des remarques déjà faites, l'élimination est possible avant que la constante $T^{(0)}$ se soit introduite. Ainsi, pour le 4^{ème} degré, on aura à considérer des équations des degrés 5, 6, 7 en $\frac{x}{y}$. Elles donneront lieu à $6+7+8=21$ équations linéaires et homogènes, entre lesquelles on doit éliminer les coefficients de $T^{(3)}$, $T^{(2)}$, $T^{(1)}$. En formant ces équations, ce qui est facile, mais un peu compliqué, on verra qu'aucun de ces coefficients, au nombre de 19, n'y manque. On aura donc, par l'élimination, 3 équations du 7^{ème} ordre. On peut donc dire que :

Les surfaces du 4^{ème} degré satisfont à 3 équations aux dérivées partielles du 7^{ème} ordre.

A un autre point de vue, ces équations expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'en un point d'une surface, le contact avec une surface du 4^{ème} degré puisse s'élever au 7^{ème} ordre. En un tel point, il existe un faisceau de telles surfaces du 4^{ème} degré.

Pour le 5^{ème} degré, on aura à considérer des équations des degrés 6, 7, 8, 9 en $\frac{x}{y}$. Elles donneront lieu à 54 équations linéaires et homogènes entre les coefficients de $T^{(4)}$, $T^{(3)}$, $T^{(2)}$, $T^{(1)}$, au nombre de 34, et dont aucun n'y manque. Donc :

Les surfaces du 5^{ème} degré satisfont à une équation aux dérivées partielles du 9^{ème} ordre.

Cette équation caractérise, sur une surface quelconque, le lieu des points en lesquels le contact avec une surface du 5^{ème} degré peut s'élever au 9^{ème} ordre. En chaque point de ce lieu, il existe un faisceau de surfaces du 5^{ème} degré ayant avec la surface considérée des contacts de cet ordre.

Il est clair que l'équation du 9^{ème} ordre dont il s'agit a pour solution générale une surface qui, en chacun de ses points, a un contact du 9^{ème} ordre avec un faisceau de surfaces du 5^{ème} degré.

Au delà du 5^{ème} degré, les mêmes raisonnements prouvent sans peine que la théorie générale, rappelée au n° 1, a toujours lieu. Il paraît bien difficile de parvenir à trouver la loi des équations définitives. S'il est cependant permis de l'espérer, c'est peut-être en suivant la marche que je viens d'indiquer, et dont l'effet est de faire disparaître immédiatement un assez grand nombre des quantités que l'on doit éliminer.

Sur la courbure des surfaces de carène; par M. A. DE SAINT-GERMAIN.

(Séance du 20 janvier 1875)

Quand un plan P se déplace de manière à détacher d'une surface convexe S un segment U de volume constant V, le centre de gravité de U décrit une surface Σ que son rôle en hydrostatique a fait nommer surface de carène. Soient M, M' deux points de Σ correspondant à deux positions infiniment voisines P, P' du plan mobile, dont l'intersection est, on le sait, une droite HH' qui passe au centre de gravité O de la section C, déterminée par P dans Σ : le plan tangent à Σ en M est parallèle à P; j'ajoute que l'indicatrice au même point est homothétique à l'ellipse principale de la section C par rapport à son centre de gravité, et qu'en outre la courbure de la surface Σ varie en raison inverse des moments d'inertie de C par rapport aux droites qui passent en son centre de gravité.

Prenons pour axes des x et des y les axes de l'ellipse principale E de la section C, et pour axe des z une perpendiculaire aux deux premiers; appelons A l'aire de C, et posons, en étendant les intégrales à tout l'intérieur de cette section,

$$\iint x^2 dx dy = Ab^2, \quad \iint y^2 dx dy = Aa^2;$$

en sorte que l'équation de l'ellipse principale E puisse s'écrire

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1;$$

le moment d'inertie C par rapport à un diamètre de longueur $2r$ sera $A \frac{a^2 b^2}{r^2}$.

Soient θ l'angle $< \pi$ de HH' avec OX, ϵ l'angle des plans P et P', et supposons P' au-dessous de P dans la région qui contient la partie positive de l'axe des x . Les différences entre les coordonnées de M' et celles de M, dx , dy , dz , sont données par le théorème des moments :

$$V dx = \iint \epsilon (x \sin \theta - y \cos \theta) x dx dy = Ab^2 \epsilon \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} Vdy &= \int \int z(x \sin \theta - y \cos \theta) y dx dy = -Aa^2 \epsilon \cos \theta, \\ Vdz &= \int \int \frac{1}{2} \epsilon^2 (x \sin \theta - y \cos \theta)^2 dx dy = \frac{1}{2} A \epsilon^2 (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

La valeur $\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{b^2} \cot \theta$ prouve que la direction de l'élément MM' est conjuguée de HH' par rapport à E . Puisque dz est infiniment plus petit que dx et dy , il faut que le plan tangent à Σ en M soit parallèle à XOY ou P ; le rayon de courbure de la section normale qui contient MM' a pour mesure

$$\rho = \frac{dx^2 + dy^2}{2dz} = \frac{A}{V} \frac{a^4 \cos^2 \theta + b^4 \sin^2 \theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = \frac{A}{V} r^2,$$

r étant la longueur du demi-diamètre de E conjugué à HH' , c'est-à-dire parallèle à la tangente à MM' ; or ρ varie comme le carré du demi-diamètre de l'indicatrice de Σ qui contient l'élément MM' ; il faut donc que cette indicatrice soit homothétique à l'ellipse principale E .

En prenant pour S un cylindre et ne considérant que des sections C parallèles aux génératrices, on a un théorème de géométrie plane : *le rayon de courbure du lieu des centres de gravité des segments d'aire constante interceptés dans une surface convexe par une corde variable, est perpendiculaire en chaque point à la corde correspondante, et égal au cube de cette corde divisé par 24 fois l'aire du segment.*

Dans le cas général, la courbure de Σ est mesurée par la somme des inverses des rayons de courbure principaux

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = V \left(\frac{1}{Aa^2} + \frac{1}{Ab^2} \right) :$$

elle est proportionnelle à ce qu'on peut appeler la valeur moyenne des inverses des moments d'inertie de C par rapport aux diamètres de E .

On ne peut trouver des relations aussi simples entre E et la courbure de la surface enveloppe du plan P , parce que la position du point où P' touche son enveloppe dépend non-seulement de la forme de la section C , mais aussi de la loi de variation du plan tangent à S sur le contour de C , et cette loi est tout à fait quelconque.

Propriété nouvelle du quadrilatère et du triangle; par M. H. BROCARD.

(Séance du 8 avril 1874)

1. *Les côtés d'un quadrilatère étant pris pour diagonales de carrés, les sommets extérieurs et intérieurs de ces carrés forment deux nouveaux qua-*

drilatères dont les médianes sont égales et se coupent à angle droit en un même point qui est leur milieu commun.

Soient $abcd$ le quadrilatère donné, A, B, C, D les sommets extérieurs des carrés, A', B', C', D' les sommets intérieurs de ces mêmes carrés.

Nous aurons démontré la proposition si nous faisons voir que les diagonales AC, BD d'une part, $A'C', B'D'$ d'autre part, sont égales et se coupent à angle droit.

2. Prenons pour origine le sommet d , pour axe des x le côté da : désignons les côtés respectivement par $2a, 2b, 2c$ et $2d$, et par α, β les angles cda, dab , et l'angle de cb avec da par γ .

Soient x_1, y_1 les coordonnées de A , x'_1, y'_1 celles de A' , etc.

Nous aurons, comme il est facile de s'en assurer, les deux systèmes d'équations :

$$\begin{array}{ll} x_1 = a, & y_1 = -a, \\ x_2 = 2a - b \cos \beta + b \sin \beta, & y_2 = b \sin \beta + b \cos \beta, \\ x_3 = 2a - 2b \cos \beta - c \cos \gamma + c \sin \gamma, & y_3 = 2b \sin \beta + c \sin \gamma + c \cos \gamma, \\ x_4 = d \cos \alpha - d \sin \alpha, & y_4 = d \sin \alpha + d \cos \alpha, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll} x'_1 = a, & y'_1 = a, \\ x'_2 = 2a - b \cos \beta - b \sin \beta, & y'_2 = b \sin \beta - b \cos \beta, \\ x'_3 = 2a - 2b \cos \beta - c \cos \gamma - c \sin \gamma, & y'_3 = 2b \sin \beta + c \sin \gamma - c \cos \gamma, \\ x'_4 = d \cos \alpha + d \sin \alpha, & y'_4 = d \sin \alpha - d \cos \alpha, \end{array}$$

sous les conditions communes

$$\begin{aligned} a &= d \cos \alpha + c \cos \gamma + b \cos \beta, \\ d \sin \alpha &= c \sin \gamma + b \sin \beta, \end{aligned}$$

par suite desquelles les expressions de $(x_1 - x_2)$, etc. deviennent

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= y_2 - y_4 = b \cos \beta - d \cos \alpha - c \sin \gamma, \\ x_2 - x_4 &= y_3 - y_1 = a + c \cos \gamma + b \sin \beta + d \sin \alpha, \end{aligned}$$

d'une part, ce qui prouve que $AC = BD$; et

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= y'_2 - y'_4 = d \cos \alpha - c \sin \gamma - b \cos \beta, \\ x'_2 - x'_4 &= y'_1 - y'_3 = a + c \cos \gamma - b \sin \beta - d \sin \alpha, \end{aligned}$$

d'autre part, ce qui prouve que $A'C' = B'D'$.

3. Des équations précédentes, on conclut encore identiquement que

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2} = -1,$$

et que

$$\frac{y'_3 - y'_1}{x'_3 - x'_1} \frac{y'_4 - y'_2}{x'_4 - x'_2} = -1,$$

ce qui montre que les diagonales (AC,BD), (A'C',B'D') des deux nouveaux quadrilatères se coupent à angle droit. Il en sera donc de même des médianes de ces deux quadrilatères. Les extrémités de ces médianes sont donc les sommets de deux nouveaux carrés. On s'assurerait enfin très-facilement que le centre commun de ces deux carrés est le *centre des moyennes distances* des sommets du quadrilatère donné.

4. De ce qui précède, on déduit une *propriété nouvelle du triangle*. En effet, si l'on suppose le quadrilatère circonscriptible, la proposition énoncée s'y appliquera également. Le triangle, étant toujours circonscriptible, représente un quadrilatère de ce genre, dans lequel un des sommets est le point de contact d'un des côtés du triangle avec la circonférence inscrite. La propriété précédente subsiste donc avec cette modification et donne lieu à l'énoncé suivant :

Les sommets d'un triangle et l'un des points de contact du cercle inscrit étant pris pour extrémités des côtés d'un quadrilatère, les sommets des carrés construits sur ces lignes comme diagonales sont les sommets de deux nouveaux quadrilatères dont les médianes sont égales et se coupent à angle droit en un même point qui est leur milieu commun.

Dans ce dernier cas, la distance de ce point au côté qui renferme trois sommets du quadrilatère est le quart de la hauteur correspondant à ce côté.

Sur l'intégration de quelques équations différentielles ; par L. V. TURQUAN.

(Séance du 25 février 1874)

J'ai intégré quelques équations différentielles en les convertissant en équations aux différences partielles d'une fonction de deux variables. Ce procédé peut paraître détourné, mais n'a rien qui puisse surprendre, car on sait trouver les intégrales générales de plusieurs équations aux différences partielles, tandis que certaines équations différentielles ordinaires n'ont pu encore être intégrées en termes finis, c'est-à-dire ramenées à des quadratures. Ce procédé peut d'ailleurs, dans certains cas, donner les intégrales d'équations différentielles qui résistent aux procédés connus jusqu'ici. Un des exemples que je traite est, je crois, dans ce cas.

1° Soit

$$(1) \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

une équation différentielle du premier ordre, algébrique et d'un degré quelconque par rapport à $\frac{dy}{dx}$. Je poserai

$$z = Ty,$$

T étant une fonction connue quelconque d'une nouvelle variable t . J'aurai

$$\frac{dz}{dx} = p = T \frac{dy}{dx}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{T},$$

$$\frac{dz}{dt} = q = \frac{dT}{dt} y, \quad \text{d'où} \quad y = q : \frac{dT}{dt}.$$

Je porte ces valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de y dans l'équation (1), qui devient ainsi une équation aux différences partielles de z , mais qui ne contient pas cette fonction, savoir

$$(2) \quad \varphi(x, t, p, q) = 0.$$

Or Lagrange a fait dépendre l'intégration de l'équation (2) de celle des équations aux différences partielles simultanées

$$(3) \quad \frac{d\varphi}{dp} \frac{dp}{dx} + \frac{d\varphi}{dq} \frac{dp}{dt} = - \frac{d\varphi}{dx},$$

$$(4) \quad \frac{d\varphi}{dp} \frac{dp}{dx} + \frac{d\varphi}{dq} \frac{dq}{dt} = - \frac{d\varphi}{dt},$$

dans lesquelles p et q désignent deux fonctions des variables indépendantes x et t . Ces deux fonctions p et q doivent satisfaire en outre à la condition $dz = p dx + q dt$, ou vérifier les relations

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dt} = q.$$

Si on pose les équations

$$(5) \quad \frac{dx}{\frac{d\varphi}{dp}} = \frac{dt}{\frac{d\varphi}{dq}} = \frac{-dp}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{-dq}{\frac{d\varphi}{dt}},$$

et qu'on en tire deux intégrales particulières

$$(6) \quad f_1(x, t, p, q) = a_1, \quad f_2(x, t, p, q) = a_2,$$

dont l'équation (2) ne soit pas un cas particulier, et a_1, a_2 étant deux constantes arbitraires, le système de ces deux intégrales constituera une intégrale particulière des équations (3) et (4); car on peut vérifier qu'elles fournissent des valeurs de $\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dx}, \frac{dq}{dt}$, qui satisfont aux équations (3) et (4).

D'ailleurs on a aussi

$$(7) \quad \frac{dp dx + dq dt - dp dx - dq dt}{\frac{d\varphi}{dp} dp + \frac{d\varphi}{dq} dq + \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dt} dt} = \frac{dx}{\frac{d\varphi}{dp}} = \dots,$$

et comme le numérateur du premier des rapports égaux (7) est nul, le dénominateur du même rapport,

$$\frac{d\varphi}{dp} dp + \frac{d\varphi}{dq} dq + \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dt} dt,$$

doit être nul aussi. Ce qui fait voir que l'équation (2) est aussi une intégrale particulière des équations (5).

On a en outre

$$(8) \quad p = T \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dT}{dt} y;$$

par conséquent, si, entre les équations (2), (6) et (8), on élimine p , q , t et $\frac{dy}{dx}$, on aura une relation entre x , y et deux constantes arbitraires

$$(9) \quad f(x, y, a_1, a_2) = 0,$$

qui devra renfermer comme cas particulier l'intégrale de l'équation proposée $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, et qui deviendra cette intégrale, si on établit entre les constantes une relation convenable.

Cette relation doit être telle que si on différencie $f(x, y, a_1, a_2) = 0$ pour en tirer $\frac{dy}{dx}$, et porter cette dérivée de y dans l'équation proposée

$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, on trouve une identité. Donc l'équation (1), après qu'on aura effectué ces opérations, se changera en une équation entre les deux constantes a_1 , a_2 , seulement, qui sera la relation cherchée.

On voit qu'on pourra obtenir par cette méthode l'intégrale d'une équation différentielle donnée, chaque fois qu'on pourra obtenir deux intégrales particulières du système

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dp}} = \frac{dt}{\frac{d\varphi}{dq}} = \frac{-dp}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{-dq}{\frac{d\varphi}{dt}},$$

et distinctes de $\varphi(x, t, p, q) = b$.

On choisira la fonction T de manière à faciliter les intégrations. J'ai pris ordinairement $T = t$, ou $T = e^t$.

2° *Premier exemple* : Intégration de l'équation

$$\frac{dy^n}{dx^n} + by^n = e^{ax}.$$

Je fais

$$z = ye^t,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = pe^{-t}, \quad y = qe^{-t}.$$

L'équation proposée devient ainsi

$$p^n + bq^n = e^{ax+nt}.$$

Je poserai ensuite

$$\frac{dx}{np^{n-1}} = \frac{dq}{nbq^{n-1}} = \frac{dp}{ae^{ax+nt}} = \frac{dq}{ne^{ax+nt}},$$

équations d'où l'on tire

$$dp = \frac{adq}{n}, \quad \text{puis} \quad p = \frac{aq + c}{n},$$

c étant une constante.

J'ai aussi

$$\frac{pdx + qdt}{n(p^n + bq^n)} = \frac{dq}{ne^{ax+nt}},$$

d'où

$$pdx + qdt = dq,$$

On peut éliminer pdx , car

$$pdx = \frac{p^n dt}{bq^{n-1}} = \frac{(aq + c)^n dt}{bq^{n-1}}.$$

Ainsi

$$\frac{(aq + c)^n}{n^n bq^{n-1}} dt + qdt = dq,$$

$$dt = \frac{n^n bq^{n-1} dq}{(aq + c)^n + n^n bq^n},$$

et

$$t = \int \frac{n^n bq^{n-1} dq}{(aq + c)^n + n^n bq^n},$$

la constante arbitraire étant renfermée sous le signe $\int$.

Alors, remplaçant dans $p^n + bq^n = e^{ax+nt}$, p et t par leurs valeurs en fonction de q , on aura

$$(1) \quad \frac{(aq + c)^n}{n^n} + bq^n = e^{ax+n} \int \frac{n^n bq^{n-1} dq}{(aq + c)^n + n^n bq^n},$$

ce qui donne une relation entre x et q .

On a aussi

$$y = qe^{-t},$$

d'où

$$(2) \quad y = qe^{-\int \frac{n^nbq^{n-1}dq}{(aq+c)^n + n^nbq^n}},$$

ce qui donne une relation entre y et q . Il n'y aura plus qu'à éliminer q entre (1) et (2) pour avoir l'intégrale demandée. On peut aussi regarder les équations (1) et (2) comme représentant cette intégrale, et la question est ramenée à de simples quadratures.

3° *Deuxième exemple* : Intégration de

$$A \frac{dy^n}{dx^n} + A_1 X y \frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} + A_2 X^2 y^2 \frac{dy^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + A_{n-1} X^{n-1} y^{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n X^n y^n = 0,$$

où X représente une fonction quelconque de la variable x , et $A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ des nombres quelconques.

Je fais

$$z = ye^t,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = pe^{-t}, \quad y = qe^{-t}.$$

Par là il vient

$$(1) \quad Ap^n + A_1 X p^{n-1} q + A_2 X^2 p^{n-2} q^2 + \dots + A_{n-1} X^{n-1} p q^{n-1} + A_n X^n q^n = 0.$$

Je pose

$$\begin{aligned} & \frac{dx}{nAp^{n-1} + (n-1)A_1 X p^{n-2} q + \dots + A_{n-1} X^{n-1} q^{n-1}} \\ &= \frac{dt}{A_1 X p^{n-1} + 2A_2 X^2 p^{n-2} q + \dots + nA_n X^n q^{n-1}} \\ &= \frac{-dp}{X(A_1 p^{n-1} q + 2A_2 X p^{n-2} q^2 + \dots + nA_n X^{n-1} q^n)} = \frac{-dq}{0}. \end{aligned}$$

On voit d'abord que

$$pdx + qdt = 0,$$

que

$$\frac{qdt}{X} = -\frac{dp}{X'},$$

d'où $pdx = \frac{Xdp}{X'}$, et, par suite, $p = cmX$, c étant une constante arbitraire, et m une racine de l'équation

$$(2) \quad Au^m + A_1 u^{m-1} + A_2 u^{m-2} + \dots + A_{n-1} u + A_n = 0.$$

On a aussi $dq = 0$, d'où $q = c_1$, c_1 étant une nouvelle constante. Ces valeurs de p et q , portées dans l'équation (1), donnent

$$Ac^n m^n X^n + A_1 c^{n-1} c_1 X^n m^{n-1} + \dots + A_{n-1} c c_1^{n-1} m X^n + A^n c_1^n X^n = 0,$$

ou

$$A \left(\frac{c}{c_1} \right)^n m^n + A \left(\frac{c}{c_1} \right)^{n-1} m^{n-1} + \dots + A_{n-1} \left(\frac{c}{c_1} \right) m + A_n = 0,$$

d'où l'on voit que $c = c_1$.

D'autre part, l'équation $pdx + qdt = 0$, si l'on tient compte des résultats obtenus, devient

$$cdt = -pdx = -cmXdx,$$

d'où

$$t = -m \int X dx, \quad e^t = e^{-m \int X dx}.$$

Comme $y = qe^{-t}$, on a

$$y = ce^{m \int X dx}.$$

Nous pouvons supposer la constante qui doit accompagner $\int X dx$ con-

tenue dans c ; je vois donc que $m = \frac{\log \frac{y}{c}}{\int X dx}$.

Enfin, m étant une racine de l'équation (2), j'ai pour l'intégrale demandée

$$A \left(\frac{\log \frac{y}{c}}{\int X dx} \right)^n + A_1 \left(\frac{\log \frac{y}{c}}{\int X dx} \right)^{n-1} + \dots + A_{n-1} \frac{\log \frac{y}{c}}{\int X dx} + A_n = 0.$$

On peut arriver plus simplement à ce résultat. On pose

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = myX,$$

et l'on voit que cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ satisfera à l'équation proposée, si m est racine de l'équation (2). Or, en intégrant l'équation (3), on trouve

$$y = ce^{m \int X dx},$$

d'où $m = \frac{\log \frac{y}{c}}{\int X dx}$; et cette valeur de m , portée dans (2), donnera l'intégrale cherchée. C'est celle que nous avons trouvée.

4° *Remarque.* — Si l'on a

$$A \frac{dy^n}{dx^n} + A_1 f(x, y) \frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} + A_2 f(x, y)^2 \frac{dy^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + A_{n-1} f(x, y)^{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n f(x, y)^n = 0,$$

on fera $\frac{dy}{dx} = m f(x, y)$, m étant une racine de

$$A u^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \dots + A_{n-1} u + A_n = 0 ;$$

et si l'on sait intégrer $\frac{dy}{dx} = m f(x, y)$, on aura une équation entre x, y, m et une constante arbitraire. L'élimination de m entre cette équation et la suivante

$$A m^n + A_1 m^{n-1} + A_2 m^{n-2} + \dots + A_{n-1} m + A_n = 0,$$

donnera l'intégrale de l'équation proposée.

Si, par exemple, on a

$$A \frac{dy^n}{dx^n} + A_1 \frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n = 0,$$

on posera $\frac{dy}{dx} = m$, d'où $y - c = mx$ et $m = \frac{y - c}{x}$, et l'intégrale demandée sera

$$A \left(\frac{y - c}{x} \right)^n + A_1 \left(\frac{y - c}{x} \right)^{n-1} + \dots + A_{n-1} \frac{y - c}{x} + A_n = 0.$$

QUESTIONS

Trouver tous les couples de courbes qui jouissent de la propriété suivante : D'un point quelconque de l'espace, les deux courbes paraissent se couper à angle droit?
(MANNHEIM.)

Étant donnée une courbe dont on connaît le degré, la classe et les singularités, étudier le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe deux tangentes égales. Déterminer son degré, sa classe et ses singularités.

Même question, les tangentes égales étant menées à deux courbes distinctes.
(LAGUERRE.)

Note sur un compas trisecteur proposé par M. Laisant ; par M. H. BROCARD.

(Séance du 31 mars 1875)

A l'occasion d'un récent mémoire que j'ai publié, relatif à *Divers problèmes de géométrie dont la solution dépend de la trisection de l'angle*, mémoire que j'ai l'honneur de présenter à la Société mathématique, M. Laisant m'a fait connaître un moyen très-ingénieux de diviser un angle quelconque en trois parties égales, en se servant d'un compas articulé, d'une construction très-simple, ainsi que l'on en pourra juger.

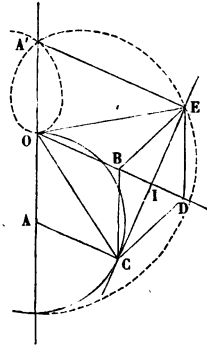
Soient OABC, BEDC, deux losanges articulés, OBD une tige rigide sur laquelle l'articulation D peut glisser. Comme la diagonale CE est divisée en deux parties égales au point I, et qu'elle est perpendiculaire à OD, on en conclut que les angles IOC, IOE sont égaux. Mais le point C se trouve sur la bissectrice OC de l'angle IOA, ainsi l'angle COA est égal aux deux autres angles, et par suite l'angle EOA est divisé en trois parties égales par les droites OI, OC.

Menons EA' parallèle à OI et par suite perpendiculaire à IE. Comme $IE = IC$, $OA' = OA$; mais le lieu du point C est une circonférence ayant A pour centre et CE pour tangente au point C. Le lieu du point E est donc la *podaire* de cette circonférence, le point A' étant le point fixe. Ce lieu est donc un *limaçon de Pascal*.

On peut rapprocher de ces remarques celles que M. Jouanne a exposées dans les *Nouvelles annales de mathématiques* (2^e série, t. IX, année 1870, p. 40). Voici, en effet, ce que dit M. Jouanne :

Pour diviser l'angle EOA en trois parties égales, de part et d'autre du point O, l'on prend sur OA et sur son prolongement OA' deux longueurs OA, OA' égales. Du point A comme centre, avec OA pour rayon, on trace une circonférence, dont la *podaire* par rapport au point A' est un *limaçon de Pascal*. Du point E, où le côté OE rencontre cette courbe, on mène une tangente EC à la circonférence. La ligne CO, qui joint le sommet de l'angle au point de contact, forme l'angle $COA = \frac{EOA}{3}$.

En effet, le point E étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point A' sur la tangente EC, les lignes EA', OI, AC sont parallèles, et comme $OA = O'A$, on a aussi $CI = IE$. Mais les angles IOC, OCA sont égaux, de plus $OCA = COA$. Ainsi $IOC = COA$. De plus, $IOC = IOE = OEA'$. Donc COA est bien le tiers de EOA.



M. Peaucellier a fait connaître, dans les *Nouvelles annales* (2^e série, t. XII, année 1873, p. 77), une série de compas articulés, dont l'un peut servir au tracé géométrique du *limaçon de Pascal*, en le considérant comme la *courbe réciproque d'une section conique*. Ces systèmes articulés fournissent ainsi une solution de la *trisection de l'angle*.

Néanmoins, dans la question spéciale que nous avons en vue, le *compas trisecteur* de M. Laisant me paraît préférable à toute autre combinaison, et il donne une solution tout à fait pratique de la *trisection de l'angle*, dans les mêmes conditions que celles où le compas ordinaire donne la bissection de l'angle ou de l'arc.

Il sera très-facile de réaliser un compas trisecteur, en réduisant à ses pièces essentielles le système articulé proposé par M. Laisant. On conservera les deux losanges articulés OBAC, BCDE et l'articulation à glissière D, mobile sur la règle OD.

Le compas trisecteur dont je viens de donner la description méritait, comme on le voit, une mention spéciale, et c'est pourquoi j'ai cru devoir le faire connaître à la Société mathématique, en le signalant à toute son attention.

Voici enfin, au sujet de la question, un détail historique d'un certain intérêt :

La trisection de l'angle au moyen du *limaçon de Pascal* fait l'objet d'un opuscule, publié à Paris en 1809, intitulé : *Trisection de l'angle*, par AZÉMAR, suivie de *Recherches analytiques sur le même sujet*, par GARNIER. L'auteur emploie uniquement le *limaçon de Pascal*, sans donner ce nom à la courbe trisectrice. Il en fait une description très-détaillée, dans l'étude analytique de laquelle on trouve les équations en coordonnées rectilignes et polaires, ainsi que la valeur du rayon de courbure, de l'arc et de la surface. Il fait connaître aussi l'énoncé et la démonstration d'une propriété du cercle, découverte par Archimède, et qui a mis sur la voie des recherches. Cette propriété n'est autre que celle qui est rappelée dans l'extrait de l'article de M. Jouanne.

Mémoire sur la transformation des formes quadratiques ;

par M. H. LEMONNIER.

(Séance du 11 novembre 1874)

Les traités de géométrie analytique indiquent, pour les coordonnées ordinaires et celles qui en sont des fonctions linéaires, à quelles conditions les équations de deux droites ou de trois plans donnent deux diamètres conjugués d'une conique, trois plans diamétraux conjugués d'une surface du

second degré. Nous n'avons rencontré nulle part l'équation de la ligne ou de la surface exprimée au moyen de celles de deux diamètres conjugués ou de trois plans diamétraux conjugués quelconques.

C'est pourquoi on accueillera, je l'espère, avec quelque intérêt les développements qui suivent, sur certaines transformations d'une forme quadratique.

Le premier problème que nous traitons est celui de passer d'une forme connue en carrés qui soient indépendants les uns des autres à toute autre forme analogue, s'exprimant par les carrés de fonctions données, linéaires par rapport à celles qui entrent dans la première forme. La question est alors d'établir, entre les coefficients de ces fonctions linéaires, des relations nécessaires et suffisantes, et de trouver les facteurs dont les carrés doivent être affectés. Nous traitons en second lieu du problème de passer d'une forme en produits sans carrés, puis de la forme générale, à toute forme possible en carrés, dans des conditions analogues à celles du premier problème. Quant à la transformation d'une somme de carrés en une somme de produits sans carrés, ou de celle d'une somme de produits, nous nous bornons au cas où la première forme dépend seulement de trois fonctions, les formules se compliquant au delà de ce nombre.

Nous terminons la première partie de ce travail par une démonstration fort simple du théorème de M. Hermite sur le maintien de l'espèce, et par l'établissement de ce fait général qu'une forme du second degré à n variables, $\sum a_{ij}x_i x_j$, est réductible à la somme de p carrés, lorsque $n - p$ des dérivées partielles sont des fonctions linéaires des autres.

I

Soient $u_1, u_2, \dots, u_n$ des fonctions de variables, linéaires ou autres, ou plutôt des expressions quelconques susceptibles chacune d'une valeur arbitraire, et soient considérées n fonctions linéaires de ces quantités :

$$U_i = \sum_{k=1}^{k=n} \epsilon_k m_{ik} u_k,$$

ϵ_k étant ± 1 .

La formule

$$\sum_{i=1}^{i=n} \epsilon_i u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i}$$

a lieu, n'est même qu'une identité, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} m_{11} & . & . & . & m_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ m_{n1} & . & . & . & m_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, et que les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i m_{hi} m_{ki} = 0 \quad (h \geq k)$$

soient satisfaites avec

$$H_k = \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i m_{ki}^2.$$

Considérons l'équation

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{i=n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i}$$

la valeur de U_i étant

$$(2) \quad U_i = \sum_{k=1}^{k=n} m_{ik} u_k.$$

La formule (1) a lieu identiquement, si l'on a pour toutes valeurs, depuis 1 jusqu'à n ,

$$(3) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki}^2}{H_k} &= 1, \\ \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki} m_{kj}}{H_k} &= 0 \quad (i \geq j). \end{aligned}$$

Il y a là $\frac{n(n+1)}{2}$ relations entre les dénominateurs H_i et les coefficients m_{ij} .

En prenant, par rapport à u_i , les dérivées de (1), on trouve

$$u_i = \frac{U_1 m_{1i}}{H_1} + \frac{U_2 m_{2i}}{H_2} + \dots + \frac{U_n m_{ni}}{H_n};$$

si l'on multiplie par m_{ki} et qu'on fasse la somme de, $i=1$ à $i=n$, on obtient

$$U_k = \frac{U_1}{H_1} \sum_{i=1}^{i=n} m_{1i} m_{ki} + \frac{U_2}{H_2} \sum_{i=1}^{i=n} m_{2i} m_{ki} + \dots + \frac{U_n}{H_n} \sum_{i=1}^{i=n} m_{ni} m_{ki},$$

ce qui donne

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_{hi} m_{ki} = 0,$$

et

$$(4) \quad H_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}^2,$$

si les U_i sont, comme les u_i , indépendants les uns des autres.

Or les n équations (2) déterminent pour $u_1, u_2, \dots, u_n$ des valeurs finies,

quand on donne à $U_1, \dots, U_n$ telles valeurs finies qu'on veut, si le déterminant des coefficients m_{ik}

$$\begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. On peut donc, à cette condition, faire que, par des valeurs convenables de $u_1, \dots, u_n$, les fonctions U_i prennent des valeurs arbitraires, indépendantes les unes des autres. Moyennant cela, les relations (3) entraînent donc les relations (4).

Réciproquement, étant donné les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations qu'implique la relation générale

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_{hi} m_{ki} = 0 \quad (h \geq k),$$

si l'on prend

$$(4) \quad \Pi_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}^2,$$

on aura la formule (1)

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{\Pi_i},$$

pourvu que le déterminant

$$M = \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Observons d'abord que l'on a

$$M^2 = \begin{vmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{vmatrix}$$

avec

$$M_{kk} = m_{k1}^2 + m_{k2}^2 + \dots + m_{kn}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}^2 = \Pi_k,$$

et

$$M_{hk} = \sum_{i=1}^{i=n} m_{hi} m_{ki} = 0 \quad (h \geq k),$$

de sorte que

$$(5) \quad M^2 = H_1 H_2 \dots H_n.$$

On voit par là que si M n'est pas nul, il en est de même de $H_1, H_2, \dots, H_n$.
Posons les n équations

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_{ik} \alpha_i = A_k.$$

Puisque le déterminant M est différent de zéro, on pourra, en disposant arbitrairement des A_k , obtenir des valeurs finies correspondantes pour $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, et, par conséquent, en attribuant à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des valeurs convenables, on aura pour $A_1, \dots, A_n$ telles valeurs finies qu'on voudra.

Or, si l'on multiplie par $m_{k1}, m_{k2}, \dots, m_{kn}$ les n équations (6) et qu'on ajoute, on obtient

$$H_k \alpha_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki} A_i,$$

d'où

$$(7) \quad \alpha_k = \frac{1}{H_k} \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki} A_i.$$

On a ainsi n équations nouvelles qui, multipliées par $m_{1h}, m_{2h}, \dots, m_{nh}$ et ajoutées, donnent

$$A_h = A_1 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih} m_{i1}}{H_i} + A_2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih} m_{i2}}{H_i} + \dots + A_n \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih} m_{in}}{H_i}$$

De là résulte

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih} m_{ik}}{H_i} = 0 \quad (h \geq k)$$

et

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}^2}{H_i} = 1;$$

ce sont les formules (3).

On a donc la formule (1)

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i},$$

du moment que M est différent de zéro, quand on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_{hi} m_{ki} = 0 \quad (h \geq k)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_{hi}^2 = H_h.$$

Il est à remarquer que, d'après cette analyse, les deux groupes de formules s'exprimant l'un par

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_{hi} m_{ki} = 0 \quad (h \geq k),$$

l'autre par

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih} m_{ik}}{H_i} = 0 \quad (h \geq k),$$

et

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}^2}{H_i} = 1,$$

pour

$$H_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki}^2,$$

sont équivalents à la seule condition que le déterminant

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_{11} & . & . & . & m_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ m_{n1} & . & . & . & m_{nn} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Si l'on change u_i en $u_i \sqrt{\varepsilon_i}$, m_{ki} en $m_{ki} \sqrt{\varepsilon_i}$, ε_i étant ± 1 , la formule (1) devient

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i}$$

pour

$$U_i = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k m_{ik} u_k,$$

et, à la place des formules (4), on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i m_{hi} m_{ki} = 0 \quad (h \geq k),$$

$$H_k = \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i m_{ki}^2;$$

à la place des formules (3)

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki}^2}{H_k}, \\ 0 &= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki} m_{kj}}{H_k} \quad (i \geq j); \end{aligned}$$

on a d'ailleurs

$$M^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \begin{vmatrix} m_{11} & . & . & . & m_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ m_{n1} & . & . & . & m_{nn} \end{vmatrix} = H_1 H_2 \dots H_n.$$

Dans cette transformation d'une somme de carrés en une autre, quand les fonctions sont réelles, l'espèce se conserve, c'est-à-dire que le nombre des carrés affectés de coefficients négatifs reste le même. C'est un théorème dont la première démonstration est due à M. Hermite (*Cours d'algèbre supérieure* par J. A. SERRET, n° 254, 2^e édit.). Il peut s'établir avec plus de simplicité comme il suit.

Considérons la formule (1)

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i u_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i^2}{H_i},$$

en y supposant réelles les fonctions u_i et, par suite, les H_i . Supposons qu'on ait là

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_p = 1, \\ \varepsilon_{p+1} = \varepsilon_{p+2} = \dots = \varepsilon_n = -1, \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} H_1 > 0, H_2 > 0, \dots, H_q > 0, \\ H_{q+1} < 0, \dots, H_n < 0. \end{aligned}$$

Soit d'abord $q > p$. Si l'on pose

$$U_{q+1} = 0, U_{q+2} = 0, \dots, U_n = 0,$$

on pourra généralement tirer de ces équations, pour $u_{q+1}, u_{q+2}, \dots, u_n$, des valeurs en fonction de $u_1, u_2, \dots, u_q$. La substitution de ces valeurs dans $\sum \varepsilon_i u_i^2$ n'atteindra pas le terme négatif $\varepsilon_{p+1} u_{p+1}^2$. Si l'on fait ensuite $u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_p = 0$, le premier membre de la formule ne sera susceptible que de valeurs négatives, tandis que le second n'ayant plus que des termes positifs sera d'un signe contraire. On ne peut donc avoir $q > p$.

Soit en second lieu $q < p$. Si l'on pose alors

$$U_1 = 0, U_2 = 0, \dots, U_q = 0,$$

et qu'on tire de là $u_1, u_2, \dots, u_q$ en fonction de $u_{q+1}, \dots, u_n$, pour en substituer les valeurs dans le premier membre, la substitution n'atteindra pas le terme positif $\varepsilon_q u_q^2$. On pourra donc faire que le premier membre soit d'une valeur positive, tandis que le second n'ayant que des termes négatifs ne pourra avoir le même signe.

On ne saurait donc avoir $q < p$. Donc les termes négatifs sont en même nombre des deux côtés.

Dans ce mode de démonstration, nous supposons bien deux déterminants mineurs différents de zéro ; mais un cas d'exception ne peut là faire difficulté, car il serait à considérer comme limite du cas général.

Des conditions à remplir pour qu'une forme quadratique, homogène, de n variables

$$\sum a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} \geq a_{ji})$$

soit réductible à être une somme de p carrés ; $p < n$.

Soit posé

$$\sum a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{i=p} A_i U_i^2 \quad (p \geq n),$$

U_i étant une fonction linéaire homogène des variables x_k .

Posons $U_i = 0$ pour les p valeurs de i , et tirons de ces équations les valeurs de p des variables en fonction des autres. Si ces valeurs se substituent dans la forme, elle deviendra nulle, quelles que soient les valeurs attribuées aux $n - p$ autres variables.

Il en sera de même pour toute dérivée partielle de la fonction $2 \sum A_i U_i \frac{dU_i}{dx_k}$. D'après quoi, si l'on égale à zéro p des n dérivées de la forme par rapport aux variables, et qu'on tire des p équations les valeurs de p des variables en fonction des autres, la substitution de ces valeurs dans les autres dérivées conduira à des résultats nuls, quelles que soient les valeurs attribuées à ces autres variables.

Réciproquement, la fonction du second degré est une somme de p carrés, lorsque les valeurs de p des variables tirées des équations qu'on obtient en égalant à zéro p des n dérivées annulent les autres identiquement. Cela revient encore à ce que $n - p$ des dérivées soient des combinaisons linéaires des p autres, alors qu'aucune de celles-ci ne l'est des $p - 1$ autres.

Soient, en effet, $x_1, x_2, \dots, x_p$ les variables qui s'expriment par les autres au moyen de p dérivées égalées à zéro. L'hypothèse est que les valeurs de ces variables ainsi obtenues annulent toutes les dérivées, quelques valeurs qu'on attribue à $x_{p+1}, \dots, x_n$. En général, on pourra façonner la fonction en une somme de carrés, en nombre n au plus, tels que x_1 entre dans le premier seul, x_2 dans le deuxième, sans être dans les suivants, qu'il soit ou non dans le premier, x_3 dans le troisième, sans appartenir à ceux qui le suivent, étant ou non dans les précédents, et ainsi de suite. Soient $X_1, X_2, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n$ les fonctions dont on a ainsi les carrés, abstraction faite des coefficients.

Prenons les dérivées de la forme par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_n$. La pre-

mière ne dépendra que de X_1 , la deuxième de X_1 et de X_2 , la troisième de X_1, X_2, X_3 , etc., et elles en seront des fonctions linéaires. Or les expressions des p variables $x_1, x_2, \dots, x_p$ en fonction des autres qui annulent les dérivées, pour toutes valeurs de ces dernières variables, annuleront alors X_1 , et par suite X_2 , puis X_3 , etc., jusqu'à X_p , ainsi que $X_{p+1}, \dots, X_n$. Mais ces dernières fonctions étant indépendantes des p variables en question, c'est identiquement qu'elles sont nulles, sans aucune substitution. Donc la forme quadratique est la somme de p carrés. Elle pourra d'ailleurs se transformer d'autre façon en somme de p carrés.

C'est ainsi qu'une forme quadratique est réductible à un seul carré, quand la valeur d'une variable tirée d'une dérivée égale à zéro annule toutes les autres, ou, ce qui revient au même, quand les dérivées sont proportionnelles à des constantes. Sous ce dernier énoncé, le théorème, du reste, s'étend à une fonction homogène quelconque de plusieurs variables de degré K , en ce qu'elle est alors la puissance du degré K d'une fonction linéaire des variables.

II

Proposons-nous d'abord de transformer

$$2 \sum u_i u_j$$

en $\sum \frac{U_k^2}{H_k}$, alors que les nombres k, i et j sont variables de 1 à n , i se prenant plus petit que j .

Soit posé

$$(1) \quad 2 \sum u_i u_j = \sum \frac{U_k^2}{H_k}$$

pour

$$(2) \quad U_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki} u_i.$$

La formule (1), comme identité, implique les relations

$$(3) \quad 0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik}^2}{H_i}$$

et

$$(3) \quad 1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik} m_{ij}}{H_i} \quad (h \geq j).$$

En prenant la dérivée de (1) par rapport à u_i , on obtient

$$(4) \quad \sum u_j = \sum_{k=1}^{k=n} m_{ki} \frac{U_k}{H_k} \quad (j \geq i).$$

nent les relations (3), et par conséquent la formule (1), si les H_h et le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_{11} & . & . & . & . & m_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ m_{n1} & . & . & . & . & m_{nn} \end{vmatrix}$$

sont différents de zéro.

Posons en effet

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_{kh} \alpha_k = A_h,$$

h étant susceptible des valeurs 1, 2, ..., n .

Si l'on multiplie les n égalités par $\frac{1}{n-1} S_g - m_{g1}, \dots, \frac{1}{n-1} S_g - m_{gn}$, et qu'on ajoute, on obtient

$$H_g \alpha_g = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \left(\frac{1}{n-1} S_g - m_{gi} \right),$$

d'où

$$\alpha_g = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i}{H_g} \left(\frac{1}{n-1} S_g - m_{gi} \right).$$

Considérons les égalités de ce genre répondant à $g = 1, 2, \dots, n$, multiplions-les par $m_{1h}, m_{2h}, \dots, m_{nh}$ et ajoutons les résultats; il s'ensuit

$$A_h = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{kh}}{H_k} \left(\frac{1}{n-1} S_k - m_{ki} \right) \right\}.$$

Comme, d'après les hypothèses faites, $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont susceptibles de telles valeurs qu'on veut, cette égalité se partage en

$$1 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{kh}}{H_k} \left(\frac{1}{n-1} S_k - m_{hk} \right),$$

$$0 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki}}{H_k} \left(\frac{1}{n-1} S_k - m_{kj} \right) \quad (i \geq j).$$

Or, si l'on pose

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{ki} m_{kj}}{H_k},$$

ces n relations peuvent s'écrire

$$1 = \frac{1}{n-1} (M_{h1} + M_{h2} + \dots + M_{h, h-1} + M_{h, h+1} + \dots + M_{hn}) - \frac{n-2}{n-1} M_{hh},$$

$$0 = -\frac{n-2}{n-1} M_{h1} + \frac{1}{n-1} (M_{h2} + M_{h3} + \dots + M_{hn}) - \frac{1}{n-1} M_{hh},$$

$$0 = -\frac{n-2}{n-1} M_{h2} + \frac{1}{n-1} (M_{h1} + M_{h3} + \dots + M_{hn}) + \frac{1}{n-1} M_{hh},$$

$$\dots \dots \dots$$

M_{hh} manquant dans la parenthèse.

En soustrayant de la première relation chacune des autres, on a, à la place de celles-ci,

$$\begin{aligned} 1 &= M_{h1} - M_{hh}, \\ 1 &= M_{h2} - M_{hh}, \\ &\dots \end{aligned}$$

d'où, par l'addition,

$$n - 1 = (M_{h1} + M_{h2} + \dots + M_{hn}) - (n - 1)M_{hh}.$$

La première relation étant

$$n - 1 = (M_{h1} + M_{h2} + \dots + M_{hn}) - (n - 2)M_{hh},$$

il s'ensuit

$$M_{hh} = 0$$

et

$$M_{hi} = 1 \quad (h \geq i).$$

Les relations (3) sont ainsi obtenues.

Les relations (3) et les relations (7) sont, en conséquence, équivalentes, eu égard à la valeur générale de H_h et aux conditions exprimées.

En second lieu, soit proposé de transformer

$$2 \sum a_{ij} u_i u_j,$$

alors que i est différent de j en $\sum \frac{U_k^2}{H_k}$, les u_i étant indépendants les uns des autres, ainsi que les U_k .

Soit posé

$$(1) \quad 2 \sum a_{ij} u_i u_j = \sum \frac{U_k^2}{H_k}$$

pour

$$(2) \quad U_k = \sum_{i=1}^{i=n} m_{ki} u_i;$$

c'est avoir

$$(3) \quad 0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik}^2}{H_i},$$

$$(3) \quad a_{hk} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih} m_{ik}}{H_i} \quad (h \geq k).$$

En prenant la dérivée de (1) par rapport à u_i , on trouve

$$(4) \quad \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} u_j = \sum_{k=1}^{k=n} m_{ki} \frac{U_k}{H_k},$$

j étant différent de i , ou $a_{ii} = 0$.

Comme i est susceptible des n valeurs $1, 2, 3, \dots, n$, il y a n équations de ce genre. Multiplions-les par $\lambda_{h1}, \lambda_{h2}, \dots, \lambda_{hn}$ et ajoutons ; il s'ensuivra

$$(5) \quad U_h = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i}{H_i} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_{hi} m_{ik} \right),$$

en posant

$$(6) \quad a_{1i} \lambda_{hi} + a_{2i} \lambda_{hi} + \dots + a_{i-1,i} \lambda_{hi} + a_{i+1,i} \lambda_{hi} + \dots + a_{ni} \lambda_{hi} = m_{hi},$$

i variable de 1 à n .

Ces équations (6) donnent

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta \lambda_{hi} = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \dots & m_{hi} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & m_{hn} & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

et l'équation (5) se partage en

$$(7) \quad H_h = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{hi} m_{hi},$$

$$(7) \quad 0 = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{hi} m_{ki} \quad (h \gtrless k),$$

de sorte qu'avec les expressions de H_h , il y a là $\frac{n(n-1)}{2}$ relations.

Réciproquement, ces relations, en ayant égard aux expressions des H_h , entraînent les relations (3), par suite la formule (1), si les H_h et le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

sont différents de zéro.

Posons, en effet,

$$\sum_{k=1}^{k=n} m_{hk} x_k = A_h \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

et multiplions ces égalités par $\lambda_{g1}, \lambda_{g2}, \dots, \lambda_{gn}$, puis ajoutons ; nous aurons

$$H_g x_g = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \lambda_{gi},$$

d'où

$$x_g = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \frac{\lambda_{gi}}{H_g};$$

et de là, en faisant $g = 1, 2, \dots, n$ et multipliant par $m_{1h}, m_{2h}, \dots$,

$$A_h = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_{hk}}{H_k} \lambda_{ki} \right),$$

ce qui se partage en

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}}{H_i} \lambda_{ih}, \\ 0 &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}}{H_i} \lambda_{ik} \quad (h \geq k), \end{aligned}$$

La première de ces deux relations peut se développer moyennant la valeur de λ_{ih} en

$$\begin{aligned} a_{h1} \beta_{h1} - a_{h2} \beta_{h2} + \dots \pm a_{hn} \beta_{hn} &= \left(\frac{m_{11} m_{1h}}{H_1} + \frac{m_{21} m_{2h}}{H_2} + \dots \right) \beta_{h1} \\ &\quad - \left(\frac{m_{12} m_{1h}}{H_1} + \frac{m_{22} m_{2h}}{H_2} + \dots \right) \beta_{h2} + \dots, \end{aligned}$$

ce qui est satisfait par

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik} m_{ih}}{H_i},$$

et

$$0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih}^2}{H_i}.$$

Il en est de même des autres formules du premier groupe.

La première de celles du second, se développant en

$$0 = \left(\frac{m_{11} m_{1h}}{H_1} + \frac{m_{21} m_{2h}}{H_2} + \dots \right) \beta_{h1} - \left(\frac{m_{12} m_{1h}}{H_1} + \frac{m_{22} m_{2h}}{H_2} + \dots \right) \beta_{h2} + \dots,$$

revient également, moyennant les mêmes conditions, à

$$0 = a_{h1} \beta_{h1} - a_{h2} \beta_{h2} + \dots,$$

ce qui a lieu, h étant différent de k ; et de même pour les autres.

D'ailleurs, il n'y a pas d'autre solution ; car, à prendre pour inconnues les n expressions

$$M_{kh} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik} m_{ih}}{H_i},$$

le déterminant des n équations est

$$\delta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix} = \Delta^{n-1} \geq 0.$$

La réciproque à établir est ainsi démontrée.

Cette analyse est de tout point applicable à la fonction complète du second degré

$$\sum a_{ij} u_i u_j \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

i et j variables de 1 à n , sauf à remplacer, dans Δ et $\Delta\lambda_{hi}$, les éléments 0 par $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Car si l'on pose

$$(1) \quad \sum a_{ij} u_i u_j = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{U_k^2}{H_k},$$

on aura, pour la dérivée par rapport à u_i ,

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} u_j = \sum_{k=1}^{k=n} m_{ki} \frac{U_k}{H_k}.$$

En multipliant par $\lambda_{h1}, \lambda_{h2}, \dots, \lambda_{hn}$ les n équations de cette sorte, et les ajoutant, on aura

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{k=1}^{k=n} a_{ki} \lambda_{hk} \right) u_i = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{hi} \left(\sum_{k=1}^{k=n} m_{ki} \frac{U_k}{H_k} \right),$$

d'où

$$U_h = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{U_i}{H_i} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_{hk} m_{ik} \right),$$

en déterminant les λ_{hk} par les équations

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{ik} \lambda_{hi} = m_{hk},$$

qui donnent

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta\lambda_{hi} = \begin{vmatrix} a_{11} & m_{h1} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & m_{hn} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et l'on a par là

$$H_h = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{hi} m_{hi},$$

$$0 = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_{hi} m_{ki} \quad (h \geq k).$$

Réciproquement, on pourra déduire de ces relations, comme plus haut,

$$a_{kk} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ik}^2}{H_i},$$

$$a_{hk} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_{ih} m_{ik}}{H_i},$$

et par conséquent la formule (1).

III

Transformation de $u^2 + v^2 + w^2$ en $\frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''}$.

Soit posé

$$(1) \quad u^2 + v^2 + w^2 = \frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''}$$

pour

$$\begin{aligned} U &= mu + nv + pw, \\ V &= m'u + n'v + p'w, \\ W &= m''u + n''v + p''w. \end{aligned}$$

Avoir la formule (1) pour toutes valeurs de u, v, w , c'est avoir

$$(2) \quad \begin{aligned} 1 &= \frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''}, \\ 1 &= \frac{nn'}{H} + \frac{n'n''}{H'} + \frac{n''n}{H''}, \\ 1 &= \frac{pp'}{H} + \frac{p'p''}{H'} + \frac{p''p}{H''}, \end{aligned}$$

et

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{mn' + m'n}{H} + \frac{m'n'' + m''n'}{H'} + \frac{m''n + mn''}{H''} &= 0, \\ \frac{np' + pn'}{H} + \frac{n'p'' + p'n''}{H'} + \frac{n''p + p''n}{H''} &= 0, \\ \frac{pm' + mp'}{H} + \frac{p'm'' + m'p''}{H'} + \frac{p''m + m''p}{H''} &= 0. \end{aligned}$$

Or on a

$$(4) \quad \begin{aligned} 2u &= \frac{mV + m'U}{H} + \frac{m'W + m''V}{H'} + \frac{m''U + mW}{H''}, \\ 2v &= \frac{nV + m'U}{H} + \frac{n'W + n''V}{H'} + \frac{n''U + nW}{H''}, \\ 2w &= \frac{pV + p'U}{H} + \frac{p'W + p''V}{H'} + \frac{p''U + pW}{H''}, \end{aligned}$$

d'où, en multipliant par m, n, p et ajoutant,

$$(5) \quad 2U = \frac{(m^2 + n^2 + p^2)V + (mm' + nn' + pp')U}{H} + \frac{(mm' + nn' + pp')W + (mm'' + nn'' + pp'')V}{H'} + \frac{(mm'' + nn'' + pp'')U + (m^2 + n^2 + p^2)W}{H''},$$

relation qui se partage en

$$(6) \quad \begin{aligned} 2 &= \frac{mm' + nn' + pp'}{H} + \frac{mm'' + nn'' + pp''}{H''}, \\ 0 &= \frac{m^2 + n^2 + p^2}{H} + \frac{mm' + nn' + pp'}{H'}, \\ 0 &= \frac{mm' + nn' + pp'}{H'} + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{H''}, \end{aligned}$$

si U, V, W peuvent être quelconques, c'est-à-dire si l'on a

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix} \geq 0.$$

Réolvons ces équations par rapport à $\frac{1}{H}, \frac{1}{H'}, \frac{1}{H''}$. Le déterminant est

$$\Delta_1 = 2(mm' + nn' + pp')(mm'' + nn'' + pp'')(m^2 + n^2 + p^2),$$

et l'on trouve

$$\begin{aligned} \Delta_1 \frac{1}{H} &= 2(mm'' + nn'' + pp'')(m^2 + n^2 + p^2), \\ \Delta_1 \frac{1}{H'} &= -2(m^2 + n^2 + p^2), \\ \Delta_1 \frac{1}{H''} &= 2(m^2 + n^2 + p^2)(mm' + nn' + pp'), \end{aligned}$$

d'où

$$(7) \quad \begin{aligned} H &= mm' + nn' + pp', \\ H' &= -\frac{(mm' + nn' + pp')(mm'' + nn'' + pp'')}{m^2 + n^2 + p^2}, \\ H'' &= mm'' + nn'' + pp''. \end{aligned}$$

A l'aide des facteurs m', n', p' , on tire de même des équations (4)

$$\begin{aligned} \Pi' &= m'm'' + n'n'' + p'p'', \\ \Pi'' &= -\frac{(m'm'' + n'n'' + p'p'')(m'm + n'n + p'p)}{m'^2 + n'^2 + p'^2}, \\ H &= m'm + n'n + p'p, \end{aligned}$$

et, à l'aide des facteurs m'', n'', p'' ,

$$\begin{aligned} H'' &= m''m + n''n + p''p, \\ H &= -\frac{(m''m + n''n + p''p)(m''m' + n''n' + p''p')}{m''^2 + n''^2 + p''^2}, \\ H' &= m''m' + n''n' + p''p'. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} (8) \quad H &= mm' + nn' + pp', \\ H' &= m'm'' + n'n'' + p'p'', \\ H'' &= m''m + n''n + p''p, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (8) \quad m^2 + n^2 + p^2 &= -\frac{HH''}{H}, \\ m'^2 + n'^2 + p'^2 &= -\frac{H'H}{H'}, \\ m''^2 + n''^2 + p''^2 &= -\frac{H''H'}{H''}, \end{aligned}$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} H^2 &= (m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n'^2 + p'^2), \\ H'^2 &= (m'^2 + n'^2 + p'^2)(m''^2 + n''^2 + p''^2), \\ H''^2 &= (m''^2 + n''^2 + p''^2)(m^2 + n^2 + p^2), \end{aligned}$$

et

$$-HH'H'' = (m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n'^2 + p'^2)(m''^2 + n''^2 + p''^2).$$

Par suite, il faut

$$\begin{aligned} (9) \quad H &= -\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}, \\ H' &= -\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2} \sqrt{m''^2 + n''^2 + p''^2}, \\ H'' &= -\sqrt{m''^2 + n''^2 + p''^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} (9) \quad H &= -\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2}, \\ H' &= -\sqrt{m'^2 + n'^2 + p'^2} \sqrt{m''^2 + n''^2 + p''^2}, \\ H'' &= -\sqrt{m''^2 + n''^2 + p''^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}, \end{aligned}$$

chaque radical pouvant d'ailleurs se prendre implicitement avec tel signe qu'on voudra.

Sous forme rationnelle on a donc

$$(m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n'^2 + p'^2) - (mm' + nn' + pp')^2 = 0,$$

ou

$$(mn' - m'n)^2 + (np' - pn')^2 + (pm' - mp')^2 = 0, \dots;$$

par où l'on voit que m, n, p ne peuvent être réels à la fois.

Réciproquement, étant données les expressions (8) de H, H', H'' et les relations (9), les formules (2) et (3) en seront les conséquences, par suite la formule (1), si aucune des quantités H, H', H'' n'est nulle, ni le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}.$$

Posons, en effet,

$$(10) \quad \begin{aligned} m\alpha + m'\beta + m''\gamma &= A, \\ n\alpha + n'\beta + n''\gamma &= B, \\ p\alpha + p'\beta + p''\gamma &= C. \end{aligned}$$

En disposant de α, β, γ , les quantités A, B, C pourront être de toutes valeurs, le déterminant Δ étant différent de zéro.

Multiplions ces équations par m, n, p , puis ajoutons. En tenant compte des relations (8), on trouve

$$-\frac{HH''}{H'}\alpha + H\beta + H'\gamma = mA + nB + pC.$$

On a de même par m', n', p' , et par m'', n'', p'' ,

$$H\alpha - \frac{H'H}{H''}\beta + H'\gamma = m'A + n'B + p'C,$$

$$H''\alpha + H'\beta - \frac{H''H'}{H}m''A + n''B + p''C.$$

Résolvons ces équations par rapport à α, β, γ . Le déterminant est

$$\Delta_1 = 4HH'H'',$$

et il s'ensuit

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \frac{m'A + n'B + p'C}{H} + \frac{m''A + n''B + p''C}{H''}, \\ 2\beta &= \frac{m''A + n''B + p''C}{H'} + \frac{mA + nB + pC}{H}, \\ 2\gamma &= \frac{mA + nB + pC}{H''} + \frac{m'A + n'B + p'C}{H'}. \end{aligned}$$

d'où, en multipliant par m , m' , m'' et ajoutant, on tire

$$2A = 2 \left(\frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''} \right) A + \left(\frac{mn' + m'n}{H} + \frac{m'n'' + n'm''}{H'} + \frac{m''n + nm''}{H''} \right) B \\ + \left(\frac{mp' + m'p}{H} + \frac{m'p'' + p'm''}{H'} + \frac{m''p + pm''}{H''} \right) C,$$

ce qui donne

$$1 = \frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''}, \\ 0 = \frac{mn' + m'n}{H} + \frac{m'n'' + n'm''}{H'} + \frac{m''n + nm''}{H''}, \\ 0 = \frac{mp' + m'p}{H} + \frac{m'p'' + p'm''}{H'} + \frac{m''p + pm''}{H''}.$$

On obtiendra d'une façon semblable les autres formules (2) et (3).

REMARQUE. — Quand u, v, w sont des fonctions du premier degré en x, y, z , l'équation $u^2 + v^2 + w^2 = 0$ donne un cône, et les équations $U = 0, V = 0$ deux plans passant au sommet du cône. L'intersection des deux plans est sur le cône si l'on a à la fois

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0, \\ mu + nv + pw = 0, \\ m'u + n'v + p'w = 0,$$

d'où résulte

$$\frac{u}{np' - pn'} = \frac{v}{pm' - mp'} = \frac{w}{mn' - m'n},$$

puis

$$(np' - pn')^2 + (pm' - mp')^2 + (mn' - m'n)^2 = 0.$$

Les relations (9) ont par là une signification géométrique.

Si l'on change u, v, w en $u\sqrt{\epsilon}, v\sqrt{\epsilon'}, w\sqrt{\epsilon''}$, m, n, p en $m\sqrt{\epsilon}, n\sqrt{\epsilon'}, p\sqrt{\epsilon''}$, $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ étant ± 1 , la formule (1) devient

$$u^2 + \epsilon'v^2 + \epsilon''w^2 = \frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''},$$

avec

$$U = \epsilon mu + \epsilon'nv + \epsilon''pw, \\ V = \epsilon m'u + \epsilon'n'v' + \epsilon''p'w, \\ W = \epsilon m''u + \epsilon'n''v + \epsilon''p''w.$$

et l'on a

$$H = \epsilon mm' + \epsilon'nn' + \epsilon''pp', \\ H' = \epsilon m'm'' + \epsilon'n'n'' + \epsilon''p'p'', \\ H'' = \epsilon m''m + \epsilon'n''n + \epsilon''p''p,$$

$$\begin{aligned} \epsilon m^2 + \epsilon' n^2 + \epsilon'' p^2 &= -\frac{HH''}{H'}, \\ \epsilon m'^2 + \epsilon' n'^2 + \epsilon'' p'^2 &= -\frac{H'H}{H''}, \\ \epsilon m''^2 + \epsilon' n''^2 + \epsilon'' p''^2 &= -\frac{H''H'}{H}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} H &= -\sqrt{\epsilon m^2 + \epsilon' n^2 + \epsilon'' p^2} \sqrt{\epsilon m'^2 + \epsilon' n'^2 + \epsilon'' p'^2}, \\ H' &= -\sqrt{\epsilon m'^2 + \epsilon' n'^2 + \epsilon'' p'^2} \sqrt{\epsilon m''^2 + \epsilon' n''^2 + \epsilon'' p''^2}, \\ H'' &= -\sqrt{\epsilon m''^2 + \epsilon' n''^2 + \epsilon'' p''^2} \sqrt{\epsilon m^2 + \epsilon' n^2 + \epsilon'' p^2}, \end{aligned}$$

ou les mêmes expressions avec changement de signe pour H' et H'' , chaque radical impliquant d'ailleurs tel signe qu'on voudra.

Sous forme rationnelle, c'est avoir

$$\begin{aligned} \epsilon(np' - pn')^2 + \epsilon'(pm' - mp')^2 + \epsilon''(mn' - m'n)^2 &= 0, \\ \epsilon(np'' - p''n)^2 + \epsilon'(p'm'' - m''p')^2 + \epsilon''(m'n'' - m''n')^2 &= 0, \\ \epsilon(n''p - p''n)^2 + \epsilon'(p''m - m''p)^2 + \epsilon''(m''n - mn'')^2 &= 0. \end{aligned}$$

Les formules (2) deviennent

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''}, \\ \epsilon' &= \frac{nn'}{H} + \frac{n'n''}{H'} + \frac{n''n}{H''}, \\ \epsilon'' &= \frac{pp'}{H} + \frac{p'p''}{H'} + \frac{p''p}{H''}, \end{aligned}$$

et les formules (3) restent les mêmes.

IV

Transformation de $uv + vw + wu$ en $\frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''}$.

Soit posé

$$(1) \quad uv + vw + wu = \frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''},$$

pour

$$\begin{aligned} U &= mu + nv + pw, \\ V &= m'u + n'v + p'w, \\ W &= m''u + n''v + p''w, \end{aligned}$$

u, v, w étant des quantités indépendantes les unes des autres.

Cette formule implique les relations

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''} &= 0, \\ \frac{nn'}{H} + \frac{n'n''}{H'} + \frac{n''n}{H''} &= 0, \\ \frac{pp'}{H} + \frac{p'p''}{H'} + \frac{p''p}{H''} &= 0, \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{mn' + m'n}{H} + \frac{m'n'' + n'm''}{H'} + \frac{m''n + mn''}{H''} &= 1, \\ \frac{np' + pn'}{H} + \frac{n'p'' + p'n''}{H'} + \frac{n''p' + p'n}{H''} &= 1, \\ \frac{pm' + mp'}{H} + \frac{p'm'' + m'p''}{H'} + \frac{p''m + m''p}{H''} &= 1. \end{aligned}$$

On tire de (1), par dérivation,

$$(4) \quad \begin{aligned} v + w &= \frac{mV + m'U}{H} + \frac{m''W + m''V}{H'} + \frac{m''U + mW}{H''}, \\ w + u &= \frac{nV + n'U}{H} + \frac{n''W + n''V}{H'} + \frac{n''U + nW}{H''}, \\ u + v &= \frac{pV + p'U}{H} + \frac{p''W + p''V}{H'} + \frac{p''U + pW}{H''}, \end{aligned}$$

d'où, en multipliant par λ, μ, ν et ajoutant,

$$(5) \quad \begin{aligned} (\mu + \nu)u + (\nu + \lambda)v + (\lambda + \mu)w &= \left\{ \lambda \left(\frac{m'}{H} + \frac{m''}{H''} \right) + \mu \left(\frac{n'}{H} + \frac{n''}{H''} \right) + \nu \left(\frac{p'}{H} + \frac{p''}{H''} \right) \right\} U \\ &+ \left\{ \lambda \left(\frac{m}{H} + \frac{m''}{H''} \right) + \mu \left(\frac{n''}{H'} + \frac{n}{H} \right) + \nu \left(\frac{p''}{H'} + \frac{p}{H} \right) \right\} V \\ &+ \left\{ \lambda \left(\frac{m}{H''} + \frac{m'}{H'} \right) + \mu \left(\frac{n}{H''} + \frac{n'}{H'} \right) + \nu \left(\frac{p}{H''} + \frac{p'}{H'} \right) \right\} W. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\mu + \nu = m, \quad \nu + \lambda = n, \quad \lambda + \mu = p,$$

d'où

$$\lambda = \frac{n + p - m}{2}, \quad \mu = \frac{p + m - n}{2}, \quad \nu = \frac{m + n - p}{2},$$

on aura, par cette équation (5),

$$(6) \quad \begin{aligned} 1 &= \left(\frac{m'}{H} + \frac{m''}{H''} \right) \frac{n + p - m}{2} + \left(\frac{n'}{H} + \frac{n''}{H''} \right) \frac{p + m - n}{2} + \left(\frac{p'}{H} + \frac{p''}{H''} \right) \frac{m + n - p}{2}, \\ 0 &= \left(\frac{m''}{H'} + \frac{m}{H} \right) \frac{n + p - m}{2} + \left(\frac{n''}{H'} + \frac{n}{H} \right) \frac{p + m - n}{2} + \left(\frac{p''}{H'} + \frac{p}{H} \right) \frac{m + n - p}{2}, \\ 0 &= \left(\frac{m}{H''} + \frac{m'}{H'} \right) \frac{n + p - m}{2} + \left(\frac{n}{H''} + \frac{n'}{H'} \right) \frac{p + m - n}{2} + \left(\frac{p}{H''} + \frac{p'}{H'} \right) \frac{m + n - p}{2}. \end{aligned}$$

Posons, pour abrégér,

$$m' \frac{n + p - m}{2} + n' \frac{p + m - n}{2} + p' \frac{m + n - p}{2} = [mm'] \triangleq [m'm],$$

c'est aussi

$$\frac{1}{2} (m' + n' + p') (m + n + p) - (mm' + nn' + pp') = \frac{1}{2} SS' - (mm' + nn' + pp').$$

On aura de même

$$[m'm''] = [m''m'] = \frac{1}{2} S'' S' - (m'm'' + n'n'' + p'p''),$$

$$[m''m] = [mm''] = \frac{1}{2} S S'' - (m''m + n''n + p''p),$$

$S^{(i)}$ désignant $m^{(i)} + n^{(i)} + p^{(i)}$.

Les équations (6) deviennent par là

$$\begin{aligned} (6) \quad 1 &= \frac{1}{H} [m'm] + \frac{1}{H''} [m''m], \\ 0 &= \frac{1}{H} [mm] + \frac{1}{H'} [m'm'], \\ 0 &= \frac{1}{H'} (m'm') + \frac{1}{H''} [mm], \end{aligned}$$

et l'on a pareillement

$$\begin{aligned} (6)' \quad 1 &= \frac{1}{H'} [m''m'] + \frac{1}{H} [mm'], \\ 0 &= \frac{1}{H'} [m'm'] + \frac{1}{H''} [mm''], \\ 0 &= \frac{1}{H''} [m''m'] + \frac{1}{H} [m'm'], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (6)'' \quad 1 &= \frac{1}{H''} [mm''] + \frac{1}{H'} [m'm''], \\ 0 &= \frac{1}{H''} [m''m''] + \frac{1}{H} [m'm''], \\ 0 &= \frac{1}{H''} [mm''] + \frac{1}{H'} [m''m'']. \end{aligned}$$

Sur ces relations, les trois premières donnent

$$\begin{aligned} \Delta &= 2[mm'] [mm''] [mm], \\ \Delta \frac{1}{H} &= [mm''] [mm], \end{aligned}$$

d'où

$$H = 2[mm'].$$

Par les autres, il vient de même

$$\begin{aligned} (7) \quad H' &= 2[m'm''], \\ H'' &= 2[m''m]. \end{aligned}$$

Comme l'on a

$$0 = \frac{1}{H} [mm] + \frac{1}{H'} [m''m],$$

il s'ensuit

$$0 = \frac{[mm]}{[mm']} + \frac{[m''m]}{[m'm'']},$$

ou

$$[mm'] [mm''] + [m'm''] [mm] = 0,$$

et de même

$$\begin{aligned} (8) \quad & [m'm''] [m'm] + [m''m] [m'm'] = 0, \\ & [m''m] [m'm'] + [mm'] [m''m''] = 0. \end{aligned}$$

On peut déduire des deux premières de ces relations

$$[mm'']^2 = [mm] [m'm'],$$

et l'on a de même

$$\begin{aligned} (8)' \quad & [m'm'']^2 = [m'm'] [m''m''], \\ & [m''m]^2 = [m''m''] [mm]. \end{aligned}$$

Ces systèmes (8) et (8)' sont équivalents, du moment que $[mm']$, $[m'm'']$, $[m''m]$ ou H , H' , H'' sont différents de zéro.

Les relations (8)' peuvent s'obtenir immédiatement par une autre voie, mais sous une forme différente.

D'après la formule (4), si l'on pose $U = 0$, $V = 0$, il s'ensuit $uv + vw + wu = 0$. On doit donc avoir à la fois

$$\begin{aligned} mu + nv + pw &= 0, \\ m'u + n'v + p'w &= 0, \\ uv + vw + wu &= 0. \end{aligned}$$

De là

$$\frac{u}{np' - pn'} = \frac{v}{pm' - mp'} = \frac{w}{mn - m'n'},$$

puis

$$(np' - pn')(pm' - mp') + (pm' - mp')(mn - m'n) + (mn - m'n)(np' - pn') = 0.$$

On a de même

$$\begin{aligned} (n'p'' - p'n'')(p'm'' - m'p'') + (p'm'' - m'p'')(m'n'' - m''n') \\ + (m'n'' - m''n')(n'p'' - p'n'') = 0, \\ (n''p - p''n)(p''m - m''p) + (p''m - m''p)(m'n - mn'') + (m'n - mn'')(n''p - p''n) = 0. \end{aligned}$$

On a d'après cela l'identité

$$\begin{aligned} & (np' - pn')(pm' - mp') + (pm' - mp')(mn - m'n) + (mn - m'n)(np' - pn') \\ & = [mm][m'm'] - [mm']^2 \\ & = (m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n'^2 + p'^2) - (mm' + nn' + pp')^2 \\ & + (m + n + p)(m' + n' + p')(mm' + nn' + pp') - \frac{1}{2}(m + n + p)^2(m'^2 + n'^2 + p'^2) \\ & - \frac{1}{2}(m' + n' + p')^2(m^2 + n^2 + p^2). \end{aligned}$$

Réciproquement, quand les relations (8) sont satisfaites, les relations (2) et (3) s'ensuivent, pourvu que les expressions (7) de H , H' , H'' , ainsi que le déterminant

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}$$

soient différents de zéro.

Observons d'abord que ces relations reviennent à

$$\begin{aligned} [mm] + \frac{1}{2} \frac{HH''}{H'} &= 0, \\ [m'm'] + \frac{1}{2} \frac{H'H}{H''} &= 0, \\ [m''m''] + \frac{1}{2} \frac{H''H'}{H} &= 0. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} m\alpha + m'\beta + m''\gamma &= 0, \\ n\alpha + n'\beta + n''\gamma &= 0, \\ p\alpha + p'\beta + p''\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Multiplions ces équations par les coefficients de m , n , p dans $[mm]$, et ajoutons; nous aurons

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{HH''}{H'} \alpha + [mm']\beta + [mm'']\gamma &= A \frac{n+p-m}{2} + B \frac{p'+m'-n}{2} + C \frac{m+n-p}{2} = G, \\ [m'm]\alpha - \frac{1}{2} \frac{H'H}{H''} \beta + [m'm'']\gamma &= A \frac{n'+p'-m'}{2} + B \frac{p'+m'-n'}{2} + C \frac{m'+n'-p'}{2} = G', \\ [m''m]\alpha + [m''m']\beta - \frac{1}{2} \frac{H''H'}{H} \gamma &= A \frac{n''+p''-m''}{2} + B \frac{p''+m''-n''}{2} + C \frac{m''+n''-p''}{2} = G''. \end{aligned}$$

Or le déterminant de α , β , γ dans ces nouvelles relations est

$$\Delta = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} -\frac{HH''}{H'} & H & H' \\ H & -\frac{H'H}{H''} & H' \\ H'' & H' & -\frac{H''H'}{H} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} HH'H''.$$

Il est ainsi différent de zéro, si H , H' , H'' le sont eux-mêmes.

On trouve d'ailleurs

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= 2G'[mm''] [m'm''] + 2G''[mm'] [m''m'], \\ \Delta\beta &= 2G''[m'm] [m''m] + 2G[m'm''] [mm''], \\ \Delta\gamma &= 2G[m''m'] [mm'] + 2G'[m''m] [m'm]. \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2}HH'H''A = \frac{1}{2}G(m'H'H'' + m''H'H) + \frac{1}{2}G'm'H''H + mH''H' + \frac{1}{2}G''(mHH' + m'HH''),$$

puis

$$A = G\left(\frac{m'}{H} + \frac{m''}{H''}\right) + G'\left(\frac{m''}{H'} + \frac{m}{H}\right) + G''\left(\frac{m}{H''} + \frac{m'}{H'}\right).$$

Or si

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, A, B, C sont susceptibles de valeurs quelconques, moyennant des valeurs convenables de α, β, γ . On a donc là une identité, d'où résulte

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{m'}{H} + \frac{m''}{H''}\right)\frac{n+p-m}{2} + \left(\frac{m''}{H'} + \frac{m}{H}\right)\frac{n'+p'-m'}{2} + \left(\frac{m}{H''} + \frac{m'}{H'}\right)\frac{n''+p''-m''}{2}, \\ 0 &= \left(\frac{m'}{H} + \frac{m''}{H''}\right)\frac{p+m-n}{2} + \left(\frac{m''}{H'} + \frac{m}{H}\right)\frac{p'+m'-n'}{2} + \left(\frac{m}{H''} + \frac{m'}{H'}\right)\frac{p''+m''-n''}{2}, \\ 0 &= \left(\frac{m'}{H} + \frac{m''}{H''}\right)\frac{m+n-p}{2} + \left(\frac{m''}{H'} + \frac{m}{H}\right)\frac{m'+n'-p'}{2} + \left(\frac{m}{H''} + \frac{m'}{H'}\right)\frac{m''+n''-p''}{2}. \end{aligned}$$

On obtiendra de même d'autres formes analogues.

D'après cela, si l'on pose

$$\begin{aligned} \frac{mm'}{H} + \frac{m'm''}{H'} + \frac{m''m}{H''} &= M, \\ \frac{nn'}{H} + \frac{n'n''}{H'} + \frac{n''n}{H''} &= N, \\ \frac{pp'}{H} + \frac{p'p''}{H'} + \frac{p''p}{H''} &= P, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{mn'}{H} + \frac{m'n''}{H'} + \frac{m''n + mn''}{H''} &= \mu, \\ \frac{np'}{H} + \frac{n'p''}{H'} + \frac{n''p + pn''}{H''} &= \nu, \\ \frac{pm'}{H} + \frac{p'm''}{H'} + \frac{p''m + m''p}{H''} &= \sigma, \end{aligned}$$

les relations précédentes sont

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma}{2} - M, \\ 0 &= \frac{\sigma}{2} - \frac{\mu}{2} + M, \\ 0 &= \frac{\mu}{2} - \frac{\sigma}{2} + M, \end{aligned}$$

et les analogues sont

$$1 = \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2} - N,$$

$$0 = \frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2} + N,$$

$$0 = \frac{\nu}{2} - \frac{\mu}{2} + N,$$

puis

$$1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{\nu}{2} - P,$$

$$0 = \frac{\nu}{2} - \frac{\sigma}{2} + P,$$

$$0 = \frac{\sigma}{2} - \frac{\nu}{2} + P.$$

On en déduit

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0,$$

$$\mu = 1, \quad \nu = 1, \quad \sigma = 0,$$

c'est-à-dire qu'on retrouve les relations (2) et (3).

Au résumé, les relations d'où dépend la transformation

$$uv + vw + wu = \frac{UV}{H} + \frac{VW}{H'} + \frac{WU}{H''},$$

pour

$$U = mu + nv + pw,$$

$$V = m'u + n'v + p'w,$$

$$W = m''u + n''v + p''w,$$

si l'on pose

$$[m^{(i)}m^{(j)}] = m^{(i)} \frac{n^{(j)} + p^{(j)} - m^{(j)}}{2} + n^{(i)} \frac{p^{(j)} + m^{(j)} - n^{(j)}}{2} + p^{(i)} \frac{m^{(j)} + n^{(j)} - p^{(j)}}{2},$$

consistent en

$$H = 2[mm'], \quad H' = 2[m'm''], \quad H'' = 2[m''m],$$

et

$$[mm] + \frac{1}{2} \frac{H''H}{H} = 0,$$

$$[m'm'] + \frac{1}{2} \frac{HH'}{H''} = 0,$$

$$[m''m''] + \frac{1}{2} \frac{H'H''}{H} = 0,$$

ou bien

$$[mm][m'm'] - [mm']^2 = 0,$$

$$[m'm'][m''m''] - [m'm'']^2 = 0,$$

$$[m''m''] [mm] - [m''m]^2 = 0.$$

Pour la transformation de

$$u^2 + v^2 + w^2 + t^2$$

en

$$\frac{UV}{H} + \frac{UW}{H'} + \frac{UT}{H''} + \frac{VW}{H'''} + \frac{VT}{H'''} + \frac{WT}{H'''} ,$$

si l'on a

$$\begin{aligned} U &= mu + nv + pw + qt, & V &= m'u + \dots + q't \\ W &= m''u + \dots + q''t, & T &= m'''u + \dots + q'''t, \end{aligned}$$

nous nous bornerons à faire observer qu'après avoir obtenu par des dérivations les expressions de $2u, 2v, 2w, 2t$ en fonction de U, V, W, T , on obtient, par des valeurs de $2U, 2V, 2W, 2T$, entre autres relations, les suivantes à l'égard de H, H', H'' ,

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{mm' + nn' + pp' + qq'}{H} + \frac{mm'' + nn'' + pp'' + qq''}{H'} + \frac{mm''' + nn''' + pp''' + qq'''}{H''}, \\ 0 &= \frac{m'^2 + n'^2 + p'^2 + q'^2}{H} + \frac{m'm'' + \dots + q'q''}{H'} + \frac{m'm''' + \dots + q'q'''}{H''}, \\ 0 &= \frac{m'm'' + \dots + q'q''}{H} + \frac{m''^2 + \dots + q''^2}{H'} + \frac{m'm''' + \dots + q'q'''}{H''}, \\ 0 &= \frac{m'm''' + \dots + q'q'''}{H} + \frac{m''m''' + \dots + q''q'''}{H'} + \frac{m'''^2 + \dots + q'''^2}{H''}. \end{aligned}$$

Il en résulte en particulier l'équation de condition

$$\begin{vmatrix} m'^2 + \dots + q'^2 & m'm'' + \dots + q'q'' & m'm''' + \dots + q'q''' \\ m'm'' + \dots + q'q'' & m''^2 + \dots + q''^2 & m''m''' + \dots + q''q''' \\ m'm''' + \dots + q'q''' & m''m''' + \dots + q''q''' & m'''^2 + \dots + q'''^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Comme, en posant $V = 0, W = 0, T = 0$, on a $u^2 + v^2 + w^2 + t^2 = 0$, on voit que si l'on prend

$$\frac{u}{\begin{vmatrix} n' & p' & q' \\ n'' & p'' & q'' \\ n''' & p''' & q''' \end{vmatrix}} = \frac{-v}{\begin{vmatrix} m' & p' & q' \\ m'' & p'' & q'' \\ m''' & p''' & q''' \end{vmatrix}} = \frac{w}{\begin{vmatrix} m' & n' & q' \\ m'' & n'' & q'' \\ m''' & n''' & q''' \end{vmatrix}} = \frac{-t}{\begin{vmatrix} m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \\ m''' & n''' & p''' \end{vmatrix}},$$

il s'ensuit

$$\begin{vmatrix} n' & p' & q' \\ n'' & p'' & q'' \\ n''' & p''' & q''' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m' & p' & q' \\ m'' & p'' & q'' \\ m''' & p''' & q''' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m' & n' & q' \\ m'' & n'' & q'' \\ m''' & n''' & q''' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \\ m''' & n''' & p''' \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Par là se trouve accusée l'identité

$$\begin{vmatrix} m^2 + n^2 + p^2 + q^2 & mm' + nn' + pp' + qq' & mm'' + nn'' + pp'' + qq'' \\ mm' + nn' + pp' + qq' & m'^2 + n'^2 + p'^2 + q'^2 & m'm'' + n'n'' + p'p'' + q'q'' \\ mm'' + nn'' + pp'' + qq'' & m'm'' + n'n'' + p'p'' + q'q'' & m''^2 + n''^2 + p''^2 + q''^2 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} n & p & q \\ n' & p' & q' \\ n'' & p'' & q'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p & q & m \\ p' & q' & m' \\ p'' & q'' & m'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} q & m & n \\ q' & m' & n' \\ q'' & m'' & n'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix}^2.$$

Elle fait suite à l'identité connue

$$\begin{vmatrix} m^2 + n^2 + p^2 & mm' + nn' + pp' \\ mm' + nn' + pp' & m'^2 + n'^2 + p'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & p \\ n' & p' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p & m \\ p' & m' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}^2.$$

Sur une question d'élimination ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier; par M. HALPHEN.

(Séance du 17 février 1875)

1. Quand deux courbes ont en commun un point singulier et que leurs tangentes y sont distinctes, le nombre de leurs intersections confondues en ce point est, comme on sait, égal au produit des ordres de multiplicité du point sur chacune des deux courbes. Si, au contraire, les courbes ont, au point dont il s'agit, des tangentes communes, ce nombre s'augmente. *L'augmentation est égale à la somme des ordres des contacts des branches des courbes entre elles.* Cette proposition est due à M. Cayley, et j'en ai moi-même donné des démonstrations, l'une dans ce bulletin (t. I, p. 133), l'autre dans un *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques*, dont l'Académie a décidé l'insertion au recueil des Savants étrangers. On voit immédiatement comment cette proposition fournit le moyen de calculer l'augmentation dont je viens de parler. M. de la Gournerie, qui a écrit plusieurs mémoires *Sur les singularités élevées des courbes planes* (*Journal de Math.*, 2^e série, t. XIV et XV, et *Comptes rendus*, t. LXXVII), a eu l'occasion d'en faire des applications à des cas très-complexes.

On a cependant pensé qu'il restait encore un pas à faire : on a demandé une formule générale qui fournisse immédiatement la solution du problème, quand les courbes sont données par leurs équations. La question a été nettement posée par M. Painvin dans les termes suivants :

Trouver le nombre des points coïncidant avec l'origine et communs aux deux courbes

$$\begin{aligned} x^a \varphi_{p-a} + x^b \varphi_{p-b+1} + x^c \varphi_{p-c+2} + \dots &= 0, \\ x^\alpha \psi_{q-\alpha} + x^\beta \psi_{q-\beta+1} + x^\gamma \psi_{q-\gamma+2} + \dots &= 0, \end{aligned}$$

Les lettres φ_i et ψ_i désignant des fonctions homogènes en x et y , et du degré i . (Bul. des Sc. Math. t. IV, p. 131, et t. V, p. 139.)

Sous la forme géométrique, c'est, comme on voit, un problème d'élimination, tout algébrique. M. Painvin en a donné une solution élégante dans un cas particulier, celui où l'exposant β est nul. On la trouvera un peu plus loin.

Sur le problème ainsi posé, il importe de faire une remarque : En ne caractérisant les polynômes φ_i et ψ_i que par leurs degrés, on suppose essentiellement que leurs coefficients ne soient pas particularisés de manière à modifier le nombre cherché. C'est cependant ce qui peut arriver, et c'est là précisément le cas le plus compliqué du problème général. Dans ce cas, il me paraît impossible de ne pas recourir aux développements employés par M. de la Gournerie, ou à des transformations équivalentes.

Le problème, tel que M. Painvin l'a posé, n'en reste pas moins digne d'intérêt. J'en donne ici une solution; j'y rattache ensuite le second cas, plus complexe, de telle sorte que la résolution du problème général s'obtient par l'application, plusieurs fois répétée, de la solution du problème particulier.

2. C'est une proposition rappelée plus haut qui sert de point de départ à mes recherches actuelles :

THÉORÈME I. — *Le nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point, est égal au produit des multiplicités de ce point sur les deux courbes, augmenté de la somme des ordres des contacts des branches de l'une avec les branches de l'autre au même point.*

C'est cette dernière somme qu'il s'agit de déterminer; et il est clair que, pour y parvenir, il suffit de considérer successivement chaque tangente commune, et de faire la somme des résultats. Pour abréger le langage, je désignerai cette somme par *ordre total du contact*.

J'ai donné au théorème une autre forme souvent utile (Bul. de la Soc. math. t. II, p. 35) :

THÉORÈME II. — *Le nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point O, l'équation de l'une d'elles étant, sous forme entière, $f(x, y) = 0$, est égal à la somme des ordres des quantités $f(x, y)$ quand le point (x, y) est placé successivement sur les diverses branches de l'autre courbe, à distance infiniment petite du premier ordre du point O.*

Ces propositions rappelées, j'entre en matière. J'emploie la notation $[n]$ pour désigner abrégativement un polynôme homogène de degré n en x, y , ne s'évanouissant pas avec x . Je suppose, comme l'a fait M. Painvin, une courbe ayant, à l'origine des coordonnées, des branches tangentes à l'axe des y , et ordonnant son équation, je l'écris

$$(1) \quad 0 = f(x, y) = x^{m_0}[p - m_0] + x^{m_1}[p - m_1 + a_1] \\ + x^{m_2}[p - m_2 + a_2] + \dots + x^{m_i}[p - m_i + a_i] + \dots,$$

où les nombres entiers $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$, dont le premier est au moins égal à l'unité, croissent avec leurs indices. L'entier p marque la multiplicité de l'origine sur la courbe (1). Parmi les entiers $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots$, un au moins est nul, sans quoi $f(x, y)$ serait divisible par une puissance de x . On voit que la forme de l'équation (1) est un peu plus générale que celle adoptée par M. Painvin; on obtiendra cette dernière en supposant $a_i = i$.

Je suppose que y soit infiniment petit du 1^{er} ordre, et qu'on mette dans $f(x, y)$, au lieu de x , un infiniment petit d'ordre supérieur $1 + \epsilon$ ($\epsilon > 0$). L'expression $x^{m_i}[p - m_i + a_i]$ est infiniment petite d'ordre $p + a_i + m_i$. Donc l'ordre de $f(x, y)$ est le minimum de cette dernière expression, quand on y fait varier l'indice i . La seule exception à cette règle a lieu si l'infiniment petit, qu'on substitue à x , a pour partie principale celle d'une racine de l'équation (1). L'ordre $f(x, y)$ s'élèverait dans ce cas.

Je considère maintenant une seconde courbe se composant, au point 0, de ρ branches ayant avec l'axe des y des contacts d'ordre ϵ . D'après ce que je viens de dire, et conformément au théorème II, le nombre des intersections des deux courbes, réunies au point 0, est égal à ρ fois le minimum de $p + a_i + m_i$. Comme ρp est le produit des multiplicités du point 0 sur les deux courbes, je vois que l'ordre total du contact des deux courbes est le minimum de $\rho(a_i + m_i)$, sauf toutefois le cas d'exception signalé plus haut.

Soit, comme exemple,

$$(2) \quad 0 = x^2[\pi - \mu] + [\pi + \alpha] + \dots$$

l'équation de la seconde courbe, ordonnée comme $f(x, y)$. On voit aisément que, parmi les π branches de courbe qui passent en 0, il en est μ dont Oy est la tangente, et que l'ordre commun de leur contact avec Oy est $\frac{\alpha}{\mu}$. Si, d'ailleurs, je laisse aux polynômes qui figurent dans (1) et (2) toute leur généralité, le cas d'exception n'a pas lieu. Donc, en appliquant le résultat précédent, et faisant $\rho = \mu$, $\epsilon = \frac{\alpha}{\mu}$, j'ai cette conclusion :

L'ordre total du contact des courbes (1) et (2) au point 0 est le minimum de $\mu a_i + \alpha m_i$.

En supposant $\alpha = 1$, et $a_i = i$, on obtient l'élégante solution que M. Painvin a donnée pour ce cas particulier du problème, et à laquelle j'ai fait précédemment allusion.

Si la seconde courbe, au lieu de contenir en 0 un seul groupe de branches ayant des contacts du même ordre avec Oy , contient plusieurs groupes analogues, ce n'est plus le minimum de $\rho(a_i + m_i)$ que l'on devra chercher, mais bien le minimum de $\rho(a_i + m_i) + \rho'(a_j + m_j) + \dots$, en supposant toujours, bien entendu, mis de côté le cas d'exception dont j'ai

parlé, et sur lequel je reviendrai dans la dernière partie de ce travail. Ce que l'on doit chercher, c'est d'exprimer ce minimum au moyen des nombres qui interviennent dans l'équation de la seconde courbe, et qui y sont analogues à m_i , a_i . J'y parviendrai, comme on va le voir, assez rapidement, en faisant usage du *parallélogramme de Newton*, dont je modifie très-légèrement la définition pour l'approprier à mon objet actuel.

3. Je reprends l'équation (1), et je marque, sur un plan, des points $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$, dont les coordonnées, par rapport à des axes rectangulaires, soient

$$\begin{array}{ll} X_0 = m_0, & Y_0 = 0, \\ X_1 = m_1, & Y_1 = a_1, \\ \dots & \dots \\ X_i = m_i, & Y_i = a_i, \\ \dots & \dots \end{array}$$

Comme il a été dit plus haut, si l'on fait y infiniment petit du 1^{er} ordre, et x infiniment petit d'ordre $1 + \epsilon$, l'ordre de $f(x, y)$ surpasse p de la plus petite des quantités $a_i + \epsilon m_i$. Je figure ces quantités en traçant une droite D passant par l'origine des coordonnées et faisant avec la direction négative de l'axe des x l'angle ω dont la tangente est ϵ . J'ai ainsi

$$a_i + \epsilon m_i = Y_i + \tan \omega \cdot X_i = \frac{\delta_i}{\cos \omega},$$

δ_i étant la distance du point P_i à la droite D .

Ainsi le groupe de termes d'ordre le moindre dans $f(x, y)$ correspond au point P_i dont la distance à D est minima. On remarquera d'ailleurs que, dans un tel groupe, un seul terme est de l'ordre $p + a_i + \epsilon m_i$; c'est celui qui contient y à la puissance $p - m_i + a_i$. Par conséquent, le cas d'exception dans lequel la partie principale de x est celle d'une racine de (1), et où les termes d'ordre minimum disparaissent, ne peut se produire que si deux points au moins, tels que P_i , sont à la distance minima de D . De là cette conclusion facile que, si une droite contient plusieurs points P et sépare l'origine de tous les autres, et si les points extrêmes qu'elle contient sont P_i et P_{i+j} , l'équation (1) admet $m_i - m_{i+j}$ racines x infiniment petites d'ordre $1 + \eta$, η étant la tangente de l'angle que fait, avec la direction négative de l'axe des x , la droite considérée. Par suite, on n'aura qu'à tracer un polygone, tournant sa convexité vers l'origine, ayant pour sommets des points P , et séparant l'origine de tous les autres, pour obtenir la figuration des diverses quantités telles que η , et du nombre des racines x auxquelles elles se rapportent.

Tout ceci est trop semblable à la célèbre règle du *parallélogramme de Newton*, pour qu'il soit utile d'entrer dans plus de détails.

Pour abrégér, je désignerai le polygone dont je viens de parler, et relatif à $f(x, y)$, par ce mot : le *polygone* (f).

Soit maintenant une seconde courbe dont l'équation est

$$(3) \quad 0 = \varphi(x, y) = x^{\mu_0}[\pi - \mu_0] + x^{\mu_1}[\pi - \mu_1 + \alpha_1] + \dots + x^{\mu_j}[\pi - \mu_j + \alpha_j] + \dots,$$

ordonnée comme $f(x, y)$; en sorte que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots$ sont des entiers croissants, dont le premier est au moins égal à l'unité.

Nous nous proposons de chercher l'ordre total du contact de cette courbe avec la courbe (1) au point 0.

Nous figurons φ , comme f , par des points Π , et nous considérons encore un polygone (φ), défini comme le précédent.

Nous supposons en plus, pour le moment, et cette hypothèse disparaîtra plus loin, que le polygone (φ) sépare l'origine de tous les points P , en sorte que le polygone (f) est entièrement à droite de (φ).

Je suppose que l'équation (3) admette un groupe de ρ racines x infiniment petites d'ordre $1 + \epsilon$, pour y infiniment petit du 1^{er} ordre. En appliquant à φ ce qui a été dit pour f , je vois que ϵ est la tangente de l'angle ω que fait avec la direction négative de l'axe des x un certain côté Δ du polygone (φ), et que ρ est la projection de ce côté sur l'axe des x . Par

suite, $\frac{\rho}{\cos \omega}$ est la longueur λ de ce côté. D'ailleurs, si D est la parallèle menée par O à Δ , et δ_i la distance de P_i à D , nous avons trouvé

$$a_i + \epsilon m_i = \frac{\delta_i}{\cos \omega}.$$

Donc

$$\rho(a_i + \epsilon m_i) = \frac{\rho \delta_i}{\cos \omega} = \lambda \delta_i.$$

Comme, par hypothèse, O et P_i sont de part et d'autre de Δ , la quantité $\lambda \delta_i$ est le double de la somme des aires des triangles ayant le côté Δ pour base, et pour sommets les points O et P_i . Le premier de ces triangles ne dépend pas du point P_i . Quant au second, on voit aisément qu'on le rendra minimum en prenant pour P_i un sommet du polygone (f), tellement choisi que les directions des côtés qui y aboutissent comprennent entre elles celle de Δ .

J'ai à considérer ensuite d'autres groupes de racines de φ . Soit ρ' le nombre des racines d'un de ces groupes, et soit aussi $1 + \epsilon'$ leur ordre. Il y correspond un autre côté Δ' du polygone (φ).

La quantité $\rho'(a_i + \epsilon' m_i)$ est représentée par le double de l'aire du triangle de sommet O et de la base λ' , augmenté du double de l'aire du triangle de sommet P_i et de même base, et ainsi de suite.

J'ai d'ailleurs à chercher le minimum de

$$\varphi(a_i + \varepsilon m_i) + \varphi'(a_j + \varepsilon m_j) + \dots$$

pour obtenir l'ordre total du contact des courbes (1) et (3). Ce nombre est donc égal au double de l'aire comprise entre les axes et le polygone (φ), augmenté du double de la somme des aires minima des triangles construits sur les côtés successifs de ce polygone et ayant pour sommets des points P.

Rien n'est plus aisé que de trouver la règle pour former ce minimum. Je ne m'y arrête pas ici. Je remarque seulement que les divers triangles de sommets $P_i, P_j, \dots$, dans la figure qui fournit l'aire minima, n'empiètent pas les uns sur les autres, en sorte que l'on peut dire que : *La moitié de l'ordre total du contact de (1) et (3) est égale à l'aire comprise entre les axes et une ligne polygonale aboutissant à ces axes, et ayant alternativement pour sommets des points P et des sommets de (φ), de manière que cette aire soit minima.*

J'ai supposé que le polygone (φ) séparait l'origine de tous les points P. Je suppose qu'en outre tous les points Π soient compris entre le polygone (φ) et le polygone (f). Dans cette hypothèse, on peut modifier le dernier énoncé et dire que :

La moitié de l'ordre du contact de (1) et (3) est égale au minimum de l'aire comprise entre les axes et une ligne polygonale aboutissant à ces axes et ayant pour sommets alternativement un point Π et un point P.

Pour traduire ce résultat en une formule algébrique sans qu'il y ait aucune ambiguïté, je vais supprimer *a priori* un certain nombre de termes dans les équations proposées. A cet effet, j'observe qu'un point Π_i ne peut faire partie du polygone (φ), si l'exposant correspondant μ_i n'est pas inférieur à tous les nombres μ d'indices moindres. Comme je sais d'ailleurs que ce sont les sommets du polygone qui doivent intervenir seuls pour la solution, je peux supprimer un tel point. Il en est de même pour les points P. En d'autres termes, je puis supposer que, dans les équations (1) et (3), les nombres $m_0, m_1, \dots$ et $\mu_0, \mu_1, \dots$ vont en décroissant quand leurs indices croissent.

Soit alors $k+1$ le rang du dernier groupe de termes subsistant dans $\varphi(x, y)$. Je peux supposer $\mu_k = 0$, c'est-à-dire $\varphi(x, y)$ non divisible par x . Parmi les points Π , il en est un sur l'axe des x , c'est Π_0 ; et un sur l'axe des y , c'est Π_k . Je peux, dans tous les cas, supposer que la ligne polygonale, limite de l'aire considérée, part de Π_0 et aboutit à Π_k .

Une quelconque de ces lignes polygonales peut être définie comme il suit. Parmi les points $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{k-1}$, j'en choisis quelques-uns. Soit r leur nombre. Leurs indices seront r nombres, compris entre 1 et $k-1$ inclusivement. Je les désigne, dans l'ordre croissant, par (1), (2), ..., (r). Parmi tous les points P, j'en choisis de même $r+1$. Leurs indices seront $r+1$

nombres compris entre zéro et l'indice supérieur des points P inclusive-
ment. Je les désigne, dans l'ordre croissant, par $[1], [2], \dots, [r+1]$. En
mettant simplement l'indice pour représenter chaque point, j'ai ainsi une
ligne polygonale

$$012 \dots (r)[r+1]k.$$

C'est cette ligne que l'on doit faire varier, tant en changeant ses som-
mets, sauf les extrêmes, qu'en modifiant le nombre de ces sommets, de
manière à rendre minima l'aire comprise entre cette ligne et les deux
axes.

Je considère la portion de cette aire comprise dans le quadrilatère formé
par l'origine et les points $(i), [i+1]$ et $(i+1)$. Son double a pour expres-
sion

$$S_i = a_{[i+1]}(\mu_{(i)} - \mu_{(i+1)}) + m_{[i+1]}(a_{(i+1)} - a_{(i)}).$$

Le double de l'aire totale est

$$S = S_0 + S_1 + \dots + S_r.$$

Pour exprimer ce résultat d'une manière plus simple, je donne une dé-
signation uniforme aux coordonnées des sommets successifs de cette ligne
polygonale.

J'appelle A_j, M_j les coordonnées du sommet de rang $j+1$. Le sommet (i)
occupe le rang $2i+1$, et le sommet $[i]$ le rang $2i$. J'ai donc

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, & M_0 &= \mu_0, \\ A_1 &= a_{[1]}, & M_1 &= m_{[1]}, \\ &\dots, & \dots, & \\ A_{2i-1} &= a_{[i]}, & M_{2i-1} &= m_{[i]}, \\ A_{2i} &= a_{(i)}, & M_{2i} &= \mu_{(i)}, \\ &\dots, & \dots, & \\ A_{2r+2} &= a_{[k]}, & M_{2r+2} &= 0. \end{aligned}$$

Soit

$$A_{j+1}M_j - M_{j+1}A_j = \Sigma_j;$$

j'ai

$$S_i = \Sigma_{2i} + \Sigma_{2i+1}.$$

Par suite

$$S = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \dots + \Sigma_{2r+1}.$$

Telle est l'expression dont le minimum fournira le nombre que l'on
cherche. Il ne faut pas perdre de vue que cette formule n'est établie que
dans l'hypothèse où tous les points Π sont compris entre les polygones (φ)
et (f) . Je vais maintenant montrer que cette restriction peut être écartée, et
que mon dernier résultat en est affranchi.

On assure la réalisation de l'hypothèse que je viens de rappeler, en don-

nant à la figure formée par les points P une translation suivant la direction positive de l'axe des x . Ceci revient à multiplier $f(x, y)$ par une puissance de x . Il est vrai que, de la sorte, aucun des points P ne se trouve plus sur l'axe des y . Mais on peut remarquer que, dans ce qui précède, on n'a pas supposé qu'il y en eût. Les conclusions ne sont donc pas troublées. Mais on a fait subir au nombre cherché une augmentation dont il faut actuellement tenir compte.

En multipliant $f(x, y)$ par x^λ , j'augmente l'ordre total du contact des deux courbes, f et φ , d'un nombre égal à celui de φ avec l'axe des y , répété λ fois. Cette augmentation est donc $\lambda\alpha_k$. Pour obtenir l'ordre total du contact de f et φ , j'ai donc : 1° à augmenter chaque nombre m_i , dans l'expression S, de la quantité fixe λ ; 2° à retrancher $\lambda\alpha_k$. Or la première opération conduit à augmenter chaque nombre S_i de $\lambda(\alpha_{i+1} - \alpha_{i1})$. Par suite, S qui est la somme des nombres S_i , se trouve augmenté de $\lambda\alpha_k$, c'est-à-dire précisément du nombre qu'il faut retrancher ensuite. Donc, ainsi que je l'ai annoncé, les résultats ci-dessus sont affranchis de l'hypothèse qui a servi à les établir.

La généralité de ces résultats étant reconnue, on peut maintenant supposer que $f(x, y)$, ainsi que $\varphi(x, y)$, ne contient pas le facteur x . Ceci permet de prendre les couples extrêmes de nombre A, M, dans l'une ou l'autre des équations, pour former les diverses valeurs de S, entre lesquelles on aura à choisir la plus petite.

Pour énoncer sous forme de ~~théorème~~ les résultats obtenus, de telle sorte qu'ils soient applicables à tous les cas, je donnerai au nombre ainsi calculé le nom de *premier surcroît d'intersection* des branches des deux courbes, tangentes à l'axe des y . J'ai supposé jusqu'ici que, si deux branches des deux courbes ont avec la tangente commune, à l'origine des coordonnées, un contact du même ordre, elles ont aussi entre elles un ~~contact~~ de ce même ordre. Dans cette hypothèse, le premier ~~surcroît~~ d'intersection n'est autre chose que l'ordre total du contact cherché. Quand cette hypothèse n'a plus lieu, il n'en est plus de même. Ainsi que je l'ai déjà annoncé, je traiterai plus loin ce cas, et j'aurai encore à y faire usage du nombre calculé comme il vient d'être dit. C'est en vue de cet usage que j'adopte ici, pour ce nombre, une dénomination particulière. Cette définition posée, voici le théorème :

THÉORÈME III. — Soient deux courbes représentées par les équations entières

$$\begin{aligned} 0 &= x^{m_0}[p - m_0] + x^{m_1}[p - m_1 + a_1] + \dots + x^{m_i}[p - m_i + a_i] + \dots, \\ 0 &= x^{\mu_0}[\pi - \mu_0] + x^{\mu_1}[\pi - \mu_1 + z_1] + \dots + x^{\mu_t}[\pi - \mu_t + z_t] + \dots, \end{aligned}$$

dans lesquelles $[n]$ représente un polynôme homogène en x et y , de degré n , non divisible par x , où les entiers a croissent avec leurs indicés, le premier

étant au moins égal à l'unité, et où il en est de même des entiers α . On fera abstraction de tous les termes de la première équation, dans lesquels l'exposant m n'est pas inférieur à tous ceux qui le précèdent; et de même dans la seconde équation, à l'égard des exposants μ . Parmi les termes qui subsistent, on prendra le premier terme de l'une des équations, puis un quelconque de rang t dans l'autre, puis un quelconque de rang t' dans la première, puis un terme de rang supérieur à t dans la seconde, un terme de rang supérieur à t' dans la première, et ainsi de suite en alternant, sans jamais rétrograder dans une même équation, et en terminant par le dernier terme de l'une des deux équations. Soient M_i , A_i les deux nombres m , a , ou μ , α , caractérisant le terme auquel on a ainsi assigné le rang $i + 1$. On formera la somme des expressions

$$A_{i+1}M_i - A_iM_{i+1}.$$

Le minimum de cette somme est le premier surcroît d'intersection des branches des deux courbes tangentes à l'axe des y , à l'origine des coordonnées.

D'après les raisonnements employés ci-dessus, il est très-aisé de démontrer la proposition suivante que je me borne à énoncer.

THÉORÈME IV. — Si l'on a soin de rejeter les combinaisons dans lesquelles quelques éléments

$$A_{i+1}M_i - A_iM_{i+1}$$

de la somme ci-dessus seraient nuls, et que, dans ces conditions, le minimum de cette somme s'obtienne d'une seule manière, ce minimum n'est autre que l'ordre total du contact des branches des courbes tangentes à l'axe des y , à l'origine des coordonnées.

Il importe de remarquer que la réciproque de cette proposition ne serait pas exacte.

Pour l'application du théorème III, on peut manifestement prendre les termes extrêmes à volonté dans l'une ou l'autre des équations et s'abstenir de les faire varier. Supposons, par exemple, que l'on ait $\mu_1 = 0$, la seconde équation, bornée aux termes convenables, ainsi qu'il est dit dans l'énoncé du théorème, se réduit à deux termes

$$0 = x^{\mu_0}[\pi - \mu_0] + [\pi + \alpha_1].$$

Je prends ces deux termes pour extrêmes. Je n'y peux intercaler qu'un seul terme de la première équation. J'ai donc

$$\begin{aligned} M_0 &= \mu_0, & M_1 &= m_1, & M_2 &= 0, \\ A_0 &= 0, & A_1 &= a_1, & A_2 &= \alpha_1. \end{aligned}$$

La somme à considérer se réduit à

$$\mu_0 a_i + a_i m_i,$$

dont le minimum fournit le premier surcroît cherché. On voit donc que le théorème III contient le résultat particulier déjà trouvé précédemment.

4. Pour former le minimum qui, suivant le théorème III, fournit le surcroît cherché, on peut former toutes les combinaisons différentes des termes des deux équations. On peut y parvenir aussi d'une manière généralement plus rapide en suivant une règle que je vais énoncer. Cette règle n'est autre chose que la traduction algébrique du procédé géométrique le plus simple pour former le minimum de l'airé qui a été considérée ci-dessus. Voici cette règle :

RÈGLE. — Dans la première des équations du théorème III, considérons les nombres $\frac{a_i}{m_0 - m_i}$. Soit L le plus petit d'entre eux, et n le plus grand indice pour lequel on ait $\frac{a_n}{m_0 - m_n} = L$. Considérons ensuite les nombres $\frac{a_i - a_n}{m_n - m_i}$, pour les valeurs de i supérieures à n , et soit n' le plus grand indice i qui donne à ce nombre sa valeur minima L' . Considérons ensuite les nombres $\frac{a_i - a_{n'}}{m_{n'} - m_i}$ pour les valeurs de i supérieures à n' , et soit L'' le plus petit d'entre eux, et ainsi de suite. Nous formons ainsi des nombres $L, L', L'', \dots$, qui vont en croissant.

Relativement à la seconde des équations du théorème III, nous formons, de la même manière, des nombres $\Delta, \Delta', \Delta'', \dots$

Rangeons tous les nombres L et Δ par ordre de grandeur en commençant par le plus petit. Nous formons ainsi une suite de groupes alternativement composés, les uns de nombres L , les autres de nombres Δ . Considérons le premier nombre de chacun de ces groupes sauf le premier, et prenons, parmi les deux couples de nombres m, a ou μ, α , qui figurent dans son expression, celui dont l'indice est le plus petit. Nous avons ainsi une série de couples de nombres $(M_0, A_0), (M_1, A_1), \dots$. Joignons-y le couple, d'indice le plus grand, qui figure dans le dernier nombre de l'avant-dernier groupe.

Ces couples de nombres (M, A) sont, dans l'ordre même où nous les rencontrons, ceux qui fournissent le minimum mentionné au théorème III.

Chaque nombre tel que L est la tangente de l'inclinaison d'un côté du polygone (f) sur l'axe des x ; en d'autres termes, $1 + L$ est l'ordre d'infiniment petit auquel appartient un groupe de racines x de la première équation, y étant supposé du premier ordre.

Le dénominateur de L est égal au nombre de ces racines. Donc un nombre Δ ne peut être égal à un nombre L , que si les deux équations considérées admettent des racines x , infiniment petites du même ordre. Ce

n'est aussi que dans ce dernier cas que l'ordre total du contact peut surpasser le premier surcroît. On peut donc ajouter à la règle précédente cette remarque, qui s'accorde avec le théorème IV :

Si aucun des nombres Λ n'est égal à un des nombres L , le premier surcroît d'intersection des branches des deux courbes tangentes à l'axe des y , à l'origine des coordonnées, est égal à l'ordre total de leur contact.

A peine est-il besoin faire observer que :

Si, au contraire, deux nombres L , Λ sont égaux, on peut, pour l'application de la règle ci-dessus, en intervertir l'ordre, sans troubler le résultat.

L'application de la règle que je viens de donner est simple et rapide. J'en donnerai un exemple :

EXEMPLE. — Désignant par n un entier positif, je pose

$$\begin{aligned} m_i &= (n-i)^2, & a_i &= i, & i &= 0, 1, 2, \dots, n, \\ \mu_j &= \frac{(2n-j)(2n-j+1)}{2}, & z_j &= j, & j &= 0, 1, 2, \dots, 2n. \end{aligned}$$

Il y a n nombres L , et l'on a

$$L_k = \frac{a_k - a_{k-1}}{m_{k-1} - m_k} = \frac{1}{2n - 2k + 1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Il y a $2n$ nombres Λ , et l'on a

$$\Lambda_k = \frac{z_k - z_{k-1}}{\mu_{k-1} - \mu_k}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n.$$

Dans cet exemple, se présente la particularité $L_k = \Lambda_{2k}$, dont il vient d'être question : il y a plusieurs manières de ranger les nombres L et Λ par ordre de grandeur. J'en choisis une

$$\Lambda_1 \Lambda_2 L_1 \Lambda_3 \Lambda_4 L_2 \dots \Lambda_{2(i+1)} L_{i+1} \Lambda_{2i+3} \dots \Lambda_{2n} L_n,$$

j'ai ainsi

$$\begin{aligned} M_{2i} &= (n-i)^2, & A_{2i} &= i, & i &= 0, 1, 2, \dots, (n-2), \\ M_{2i+1} &= (n-i-1)(2n-2i-1), & A_{2i+1} &= 2i+2. \end{aligned}$$

Le dernier couple sera

$$M_{2n-2} = 0, \quad A_{2n-2} = 2n.$$

J'ai à former la quantité

$$S = \sum_{k=0}^{k=2n-3} (M_k A_{k+1} - A_k M_{k+1}),$$

que je puis écrire

$$S = A_1 M_0 + \sum_{k=1}^{k=2n-3} M_k (A_{k+1} - A_{k-1}).$$

En groupant les termes suivant la parité de l'indice de M , et à cause de

$$A_{2i+1} - A_{2i-1} = 2, \quad A_1 = 2, \quad A_{2i+2} - A_{2i} = 1,$$

je puis écrire

$$\begin{aligned} S &= 3(n+2) + 2 \sum_{i=0}^{i=n-2} (n-i)^2 + \sum_{i=0}^{i=n-3} (n-i-1)(2n-2i-1) \\ &= \frac{n(4n^2+5)}{3} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Cette dernière valeur de S est le résultat demandé.

5. Je dois signaler ici un cas particulier, celui où les nombres (μ, α) coïncident avec les nombres (m, a) . Les équations, dans lesquelles figurent ces nombres, donnent lieu au même polygone. Dans ce cas, le premier surcroît d'intersection est égal au double de l'aire comprise entre ce polygone et les axes. On voit bien aisément aussi que, pour appliquer ici le théorème III, on devra prendre simplement pour les couples successifs (M, A) des couples (m, a) dans l'ordre croissant des indices. Enfin, pour appliquer la règle du paragraphe précédent, on prendra pour les couples (m, a) donnant le minimum, tous ceux qui figurent dans les expressions des nombre I.

On voit ainsi comment les résultats généraux acquis jusqu'à présent s'appliquent au cas particulier considéré. J'en veux maintenant tirer une importante conséquence; à savoir le procédé pour calculer l'abaissement produit dans la classe d'une courbe par un point singulier.

Pour un instant encore, je raisonne sur les deux courbes f et φ , définies au théorème III, en supposant que les couples successifs de nombres μ, α soient respectivement égaux aux couples de nombres m, a .

A chaque branche B de f , tangente à l'axe des y , à l'origine des coordonnées, on peut, dans le cas actuel, faire correspondre une branche B' de φ , ayant avec la même droite, au même point, un contact du même ordre, et inversement. Du nombre S , qui est le premier surcroît d'intersection de toutes les branches B avec toutes les branches B' , je retranche le nombre T , premier surcroît d'intersection des couples de branches correspondantes. De la sorte, si C, C' sont deux autres branches correspondantes, et si je désigne abrégativement par (BC') le premier surcroît d'intersection de B et de C' , le nombre $S - T$ se compose d'une somme d'éléments tels que $(BC') + (CB')$.

Je rappelle que, par définition, le premier surcroît d'intersection de deux branches n'est autre chose que l'ordre de leur contact, si elles ont avec la tangente commune des contacts d'ordres différents; si, au contraire, elles ont avec cette tangente des contacts du même ordre, c'est précisément cet ordre. D'après cela, il n'y a aucune difficulté à étendre cette définition à

deux branches B, C d'une même courbe. Ceci étant convenu, j'ai, dans le cas actuel,

$$(BC') = (CB') = (BC).$$

Par suite, $S - T$ se compose du double de la somme des éléments tels que (BC). En d'autres termes, $S - T$ est le double du premier surcroît d'intersection de toutes les branches de f , tangentes à l'axe des y , à l'origine des coordonnées, prises deux à deux de toutes les manières. Dans des cas particuliers, ce premier surcroît est précisément égal à la somme des ordres des contacts de ces branches entre elles. Dans le cas général, c'est un élément de cette somme, dont l'usage apparaîtra dans le paragraphe suivant.

Or, d'après M. Cayley, si p est l'ordre de multiplicité d'un point singulier, ce point produit dans la classe un abaissement égal à $p(p-1)$, augmenté du double de la somme des ordres des contacts des branches qui y passent, prises deux à deux. On voit donc que $S - T$ est, dans le cas général, un premier élément du nombre que l'on doit ajouter à $p(p-1)$, pour obtenir l'abaissement de classe dû au point singulier.

Je l'appelle *premier surcroît d'abaissement de classe*, relatif aux branches considérées. Pour être en mesure de le calculer, il me suffit, connaissant S , de chercher l'expression de T .

Je considère, à cet effet, un côté du polygone (f), et soient B, C, ... les branches qui lui correspondent. Leur nombre est égal à la projection de ce côté sur l'axe des x , et l'ordre commun de leur contact avec la tangente est la tangente de l'inclinaison de ce côté sur l'axe des x . Par suite, la somme des ordres de leurs contacts avec la tangente est égale à la projection du même côté sur l'axe des y . Cette somme n'est pas autre chose que $(BB') + (CC') + \dots$. Je considère successivement tous les côtés du polygone (f), et je conclus que T est égal à la projection de ce polygone sur l'axe des y , c'est-à-dire au dernier des nombres a . De là, en premier lieu, cet énoncé géométrique :

THÉORÈME V. — *Étant donnée la courbe $f(x, y) = 0$, traçons le polygone (f), ainsi qu'il a été expliqué au paragraphe 3; joignons le point où ce polygone rencontre l'axe des y au point situé sur l'axe des x et ayant pour abscisse l'unité. L'aire comprise entre cette dernière droite, l'axe des x et le polygone, est égale à la moitié du premier surcroît d'abaissement de classe dû aux branches de la courbe tangentes à l'axe des y , à l'origine des coordonnées.*

On remarquera ici que : Si aucun côté du polygone (f) ne contient plus de deux points représentatifs de $f(x, y)$, ce premier surcroît est égal au double de l'ordre total du contact des branches considérées entre elles.

J'ai, en second lieu, sous une forme analogue à celle du théorème III :

THÉOREME VI. — *L'équation d'une courbe étant réduite comme il est dit au théorème III, et a_n étant le dernier des nombres a , on prendra une suite de couples m, a , dans l'ordre croissant des indices, en y comprenant les extrêmes. Soit M_s, A_s , le couple m, a , qui occupe ainsi le rang $s + 1$.*

Le premier surcroît d'abaissement de classe, relatif aux branches de la courbe tangentes à l'axe des y , à l'origine des coordonnées, est le minimum de l'expression

$$-a_n + \sum (A_{s+1}M_s - A_sM_{s+1}).$$

Semblablement au théorème IV, j'ai cette proposition :

THÉOREME VII. — *Si le minimum de cette somme s'obtient d'une seule manière, ce minimum est égal à l'ordre total du contact des branches considérées entre elles.*

J'ai enfin, pour former le minimum, une règle analogue à celle du paragraphe IV :

RÈGLE. — *Pour former le minimum indiqué au théorème VI, on n'aura qu'à prendre pour les couples M, A , les couples de nombres m, a , qui figurent dans les expressions des nombres L , dont la formation est expliquée dans la règle du paragraphe 4, et en respectant leur ordre.*

J'applique cette dernière règle à l'exemple cité plus haut, à savoir

$$m_i = (n - i)^2, \quad a_i = i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Je trouve, pour le surcroît cherché, $\frac{2}{3}n(n^2 - 1)$. Il est facile de voir que, dans cet exemple, le théorème VII a lieu. Ainsi le nombre indiqué est précisément égal à l'ordre total du contact des branches considérées entre elles, quelle que soit d'ailleurs la forme des polynômes qui entrent dans l'équation de la courbe.

6. Dans ce paragraphe, je vais m'occuper du cas le plus général de l'intersection de deux courbes en un point singulier, et montrer quel usage on peut faire alors des résultats obtenus précédemment. J'invoquerai quelques propositions contenues dans mon *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques*, auquel je renvoie pour les démonstrations.

Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe, contenant des branches tangentes à l'axe des y , à l'origine des coordonnées. Ces branches se répartissent, comme on sait (*voy.* le mémoire cité), en un certain nombre de *systèmes circulaires*, correspondant aux systèmes circulaires formés par celle des racines x de l'équation, qui sont infiniment petites avec y . J'envisage un de ces systèmes circulaires D. Soit $uy^1 + \frac{a}{q}$ la partie principale d'une racine appartenant à ce système, s et q étant des entiers positifs premiers entre eux. On sait que les parties principales de toutes les autres ra-

cines, appartenant au système D, ont la même expression, qui est d'ailleurs susceptible de q valeurs.

On sait, en outre, qu'à chacune de ces q valeurs correspond un même nombre r de racines, dont le nombre total est ainsi rq . Je pose

$$(1) \quad y_1 = y^{1 + \frac{s}{q}}, \quad x_1 = x - uy_1.$$

J'obtiens ainsi une transformée $f_1(x_1, y_1) = 0$ de l'équation primitive.

Dans cette transformée, le système circulaire D se change en autre D_1 , composé de $r(q + s)$ racines x_1 infiniment petites par rapport à y_1 (*ibid.*).

De même, tout autre système circulaire D' composé de $r'q$ racines x , ayant uy_1 pour partie principale, donne également lieu, dans la transformée, à un système circulaire D'₁, composé de $r'(q + s)$ racines x_1 infiniment petites par rapport à y_1 . En d'autres termes, ces systèmes D, D' donnent lieu à des branches de la courbe transformée f_1 , qui sont tangentes à l'axe des y_1 , à l'origine des coordonnées.

Au contraire, tout système circulaire de racines x ayant une partie principale différente de uy_1 , donne lieu, dans la transformée, à un système circulaire de racines x_1 qui appartiennent à un ordre d'infiniment petit ne surpassant pas celui de y_1 . Si, en effet, x est de l'ordre de y_1 , sans avoir pour partie principale uy_1 , ou bien si x est d'ordre supérieur à celui de y_1 , x_1 est du même ordre que y_1 . Enfin, si x est d'un ordre inférieur à celui de y_1 , il en est de même de x_1 . Dans tous les cas, à cette racine x_1 correspond une branche n'ayant pas, à l'origine des coordonnées, l'axe des y_1 pour tangente.

Si maintenant je considère à part, dans la transformée, comme je l'ai fait précédemment pour la courbe primitive, les branches tangentes à l'axe des y , j'ai éliminé toutes celles qui correspondent aux racines x dont la partie principale diffère de uy_1 .

Je considère, à présent, une seconde courbe $\varphi(x, y) = 0$, contenant, comme la première, des branches tangentes à l'axe des y , à l'origine. Par les formules (1), j'en déduis une transformée φ_1 . Si uy_1 n'est la partie principale d'aucune racine de φ , on voit que φ_1 n'a aucune branche tangente à l'axe des y_1 , à l'origine. L'ordre du contact des branches de f_1 et de φ_1 , tangentes à cet axe, est nul. Et dans ce cas aussi, l'ordre du contact des branches de f , correspondant aux racines x dont la partie principale est uy_1 , avec les branches de φ , se borne au premier surcroît d'intersection de ces branches.

Si, au contraire, uy_1 est la partie principale d'une racine de φ , les choses changent. La transformée φ_1 a, comme f_1 , des branches tangentes à l'axe des y_1 , à l'origine de coordonnées. Dans ce cas aussi, l'ordre total du contact des branches des deux courbes f et φ , correspondant aux racines dont

la partie principale est uy_1 , surpasse leur premier surcroît d'intersection. Je vais prouver qu'il le surpasse d'un nombre précisément égal à l'ordre total du contact des branches de f_1 et de φ_1 , tangentes à l'axe des y_1 , à l'origine.

Soit Δ un système circulaire de racines x de φ , ayant uy_1 pour partie principale. Je considère une branche δ correspondant à une de ces racines,

et une branche d du système circulaire D . Soit $\frac{s}{q} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) l'ordre du contact de d et de δ . On sait (*ibid.*) que le nombre des couples, tels que d, δ , de branches des deux systèmes ayant entre elles un contact de ce même ordre est toujours un multiple de q . Par suite, la somme des ordres des contacts de toutes ces branches entré elles est un nombre tel que $t(s+q\varepsilon)$, t étant un nombre entier, et q le nombre des couples d, δ envisagés.

Dans les transformées f_1 et φ_1 , à deux branches, telles que d et δ , correspondent des racines x_1 dont la différence est de l'ordre $\left(1 + \frac{s}{q} + \varepsilon\right)$ relativement à y , c'est-à-dire de l'ordre $\left(1 + \frac{s}{q} + \varepsilon\right) \frac{q}{s+q}$ relativement à y_1 . C'est-à-dire qu'à deux branches telles que d et δ correspondent, dans les transformées, des branches d_1 et δ_1 , dont l'ordre du contact est

$$\left(1 + \frac{s}{q} + \varepsilon\right) \frac{q}{s+q} - 1 = \frac{q\varepsilon}{s+q}.$$

Les couples d, δ et les couples d_1 et δ_1 ne se correspondent pas un à un. Mais au groupe de q couples d, δ , correspond un groupe de couples d_1, δ_1 ; et le nombre de ces derniers est $t(s+q)$ (*ibid.*). Donc, la somme des ordres des contacts des branches composant ces derniers couples est égale à $q\varepsilon$. Ce dernier nombre est précisément égal à celui dont la somme des ordres des contacts des branches d, δ de chaque couple surpasse leur premier surcroît d'intersection.

On répétera le même raisonnement en considérant successivement toutes les combinaisons des branches d'une courbe avec les branches de l'autre. On obtiendra ainsi la démonstration de la proposition énoncée, et comme conclusion :

THÉORÈME VIII. — Si $uy^{1+\zeta}$ ($\zeta > 0$) est la partie principale à la fois d'une racine infiniment petite x de chacune des deux équations $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, formons deux transformées $f_1(x_1, x_1) = 0$, $\varphi_1(x_1, y_1) = 0$, en posant $y_1 = y^{1+\zeta}$, $x_1 = x - uy_1$. Formons de même toutes les transformées analogues et relatives aux autres quantités différentes entre elles $u^{1+\zeta}$ ($\zeta > 0$), ..., analogues à la première, et soient $f_2 = 0$, $\varphi_2 = 0$; $f_3 = 0$, $\varphi_3 = 0$; etc., ces divers couples de transformées.

L'ordre total du contact des branches des courbes f et φ , tangentes à l'axe des y , à l'origine des coordonnées, est égal à la somme des nombres analogues

et relatifs aux divers couples de courbes f_1 et φ_1 , f_2 et φ_2 , f_3 et φ_3 , ..., augmentée du premier surcroît d'intersection des branches considérées des deux courbes f et φ .

Il résulte de ce théorème que l'application du théorème III, faite successivement aux équations proposées et à un certain nombre de transformées, conduira toujours au calcul précis de l'ordre total du contact cherché.

On aperçoit immédiatement comment le théorème VIII s'applique au calcul de l'abaissement de classe dû à un point singulier; cette application peut s'énoncer ainsi :

THÉORÈME IX. — Les notations restant les mêmes qu'au théorème VIII, si une même valeur de $uy^{1+\zeta}$ est la partie principale de plus d'une racine de $f(x, y) = 0$, et de même pour $u'y^{1+\zeta'}$, ..., le double de l'ordre total du contact des branches de f , tangentes à l'axe des y , à l'origine des coordonnées, entre elles, est égal à la somme des nombres analogues pour les diverses transformées $f_1, f_2, \dots$, augmentée du premier surcroît d'abaissement de classe, dû aux branches considérées de f .

Par suite, l'application des théorèmes V ou VI, faite successivement à $f(x, y)$ et à des transformées, conduira toujours au calcul précis de l'ordre total du contact des branches considérées dans la courbe f , entre elles.

En répétant les mêmes calculs relativement à chaque tangente d'une courbe donnée, en un point singulier, multiple d'ordre p , et ajoutant à $p(p-1)$ la somme de tous les premiers surcroîts calculés, on obtiendra l'abaissement produit par le point singulier dans la classe de la courbe.

Je dois faire remarquer que la considération des transformées ci-dessus revient complètement à celle des développements relatifs aux branches partielles employés par M. de la Gournerie. On observera, en outre, que ces considérations présentent de grandes analogies, que l'on pourrait rendre complètes, avec un ordre de recherches bien différent en apparence. Je veux parler des recherches relatives à la simplification des points singuliers dans les transformées d'une courbe. Les résultats que j'ai obtenus dans un mémoire déjà cité ici, relativement aux développées successives des courbes algébriques se rattachent à ce sujet. Il en est de même de la méthode que j'ai employée dans une note sur les fonctions abéliennes (*Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 1833); j'ai d'ailleurs été de beaucoup prévenu dans cette voie par M. Nöther (*Gött. Nachr.*, 1871).

points $P_n, P_{n-1}, \dots, P_3, P_2, P_1$, tels que l'ensemble des valeurs $x_1 = O_1P_1, x_2 = O_2P_2, \dots, x_n = O_nP_n$ formera la solution du système des équations (2).

REMARQUES. — I. Les droites (X), dans ce qui précède, sont assujetties à la seule condition d'être parallèles. Mais on pourra, dans certains cas, choisir leur espacement, de manière à simplifier la construction des droites (Z).

II. Généralement, étant donné un système d'équations du premier degré à plusieurs inconnues, il sera nécessaire de lui faire subir une préparation préalable, de manière à le ramener à la forme du système (2), avant d'appliquer la méthode que nous venons d'exposer. Mais il se présentera souvent des cas dans lesquels les équations à résoudre se trouveront immédiatement écrites sous la forme convenable. Ce fait se présente par exemple pour le système d'équations qui détermine les moments fléchissants sur les appuis d'une poutre à plusieurs travées. L'application de notre méthode à ce cas intéressant a fait l'objet d'une note communiquée à l'Académie, dans sa séance du 1^{er} mars. En m'aidant de quelques autres considérations fort simples, j'ai de plus été conduit à une construction purement géométrique de ces moments fléchissants, dont la détermination, dans le cas d'un certain nombre de travées, exige des calculs assez laborieux.

Sur la génération des cycliques et cyclides; par M. L. SALTÉL.

(Séance du 14 avril 1875)

PROBLÈMES PRÉLIMINAIRES.

PROBLÈME I. — *Étant donné dans un plan un cercle S, déterminer deux cercles passant respectivement par deux couples de points donnés (A_1, B_1) , (A_2, B_2) et coupant le cercle S aux deux mêmes points? En d'autres termes, trouver deux cercles passant respectivement par (A_1, B_1) , (A_2, B_2) et ayant même axe radical avec le cercle S.*

Voici la solution que nous proposons et dont la démonstration est évidente : Par les points (A_1, B_1) faites passer un cercle arbitraire λ_1 ; soit I_1 le point de rencontre de la droite A_1B_1 avec l'axe radical des cercles S_1 et λ_1 ; de même par les points (A_2, B_2) faites passer un second cercle quelconque λ_2 , et soit I_2 le point de rencontre de la droite A_2B_2 avec l'axe radical des cercles S et λ_2 ; la droite I_1I_2 rencontre le cercle S aux deux points cherchés.

PROBLÈME II. — *Étant donné sur une sphère un cercle S, déterminer deux cercles de cette sphère passant respectivement par deux couples de points donnés (A_1, B_1) , (A_2, B_2) et coupant le cercle S aux deux mêmes points?*

De la solution du problème précédent résulte immédiatement la suivante pour ce second problème :

Prenez un point arbitraire P sur la sphère, et par les points (A_1, B_1) tracez sur cette surface un cercle arbitraire λ_1 ; soit I_1 le point de rencontre du cercle PA_1B_1 avec le cercle qui passe par P et par les deux points d'intersection des deux cercles S et λ_1 ; de même par les points (A_2, B_2) tracez sur la sphère un second cercle arbitraire λ_2 ; soit I_2 le point de rencontre du cercle PA_2B_2 avec le cercle qui passe par P et par les deux points d'intersection des deux cercles S et λ_2 ; le cercle PI_1I_2 rencontre le cercle S aux deux points demandés.

PROBLÈME III. — Étant donnés trois cercles arbitraires dans l'espace λ, C_1, C_2 , trouver deux sphères qui passent respectivement par les deux derniers et qui coupent le premier aux deux mêmes points.

Si l'on considère les points d'intersection (A_1, B_1) , (A_2, B_2) des cercles C_1, C_2 avec le plan du cercle λ , la question est évidemment ramenée à celle du premier problème.

THÉORÈMES SUR LES CYCLIQUES PLANES (*).

THÉORÈME I. — Soient C_1, C_2 deux points d'une cyclique plane Σ , et (P, Q) , (A_1, A_2) les points d'intersection de cette courbe et de deux cercles passant par (C_1, C_2) ; si l'on considère la série des cercles passant par (A_1, A_2) et coupant Σ suivant des couples de points (M_1, N_1) , (M_2, N_2) , (M_3, N_3) , ..., les cercles (PM_1N_1) , (PM_2N_2) , (PM_3N_3) , ..., contenant tous le point P , passent aussi par le point Q .

THÉORÈME II. — Soient (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) trois couples de points arbitraires pris dans un même plan; si, par les deux premiers points (A_1, B_1) , on mène un cercle quelconque λ , et que l'on considère les deux cercles passant respectivement par les points (A_2, B_2) , (A_3, B_3) et coupant le cercle λ aux deux points α_1, α_2 , ces derniers points décrivent une cyclique du 4^{ème} ordre contenant les six points (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) .

THÉORÈME III. — Non-seulement la réciproque du théorème précédent est vraie; mais on peut, étant donnée une cyclique quelconque Σ , trouver une infinité de systèmes de points (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) qui peuvent servir à sa génération.

Voici un moyen de déterminer ces systèmes de points :

Soient P, Q deux points arbitraires de la cyclique, et (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) les trois couples de points d'intersection de cette même cyclique et de trois cercles quelconques passant par P, Q ; ces trois couples de points répondent à la question.

REMARQUE. — Parmi les nombreux corollaires que l'on peut déduire de cet important théorème, nous ne citerons que les suivants :

(*) Courbes du 4^e ordre ayant pour points doubles les points circulaires à l'infini.

1° *Détermination de la tangente en un point quelconque.* — Il est manifeste que si l'on sait déterminer la tangente au point A_1 , on saura la déterminer par là même en un point quelconque. Cette dernière détermination résulte immédiatement de la génération que nous venons d'indiquer et l'on est conduit à cette règle :

Soit A'_1 le second point de rencontre des cercles $(A_1A_2B_2)$, $(A_1A_3B_3)$; la tangente au point A_1 au cercle $(A_1B_1A'_1)$ est la tangente demandée.

2° *Détermination du cercle osculateur en un point quelconque.* — Si l'on suppose les deux points (A_1, B_1) réunis au point A dans la direction AT , on obtient le cercle osculateur en ce point en procédant comme il suit :

Soit A' le second point d'intersection des cercles (AA_1B_1) , (AA_2B_2) , le cercle qui est tangent en A à la droite AT et qui passe par le point A' est le cercle osculateur cherché.

THÉORÈMES SUR LES CYCLIQUES SPHÉRIQUES (*).

THÉORÈME I. — Soient C_1, C_2 deux points d'une cyclique sphérique Σ , et (P, Q) , (A_1, A_2) les points d'intersection de cette courbe et de deux cercles passant par (C_1, C_2) ; si l'on considère la série des cercles passant par (A_1, A_2) et coupant Σ suivant des couples de points (M_1, N_1) , (M_2, N_2) , (M_3, N_3) , ..., les cercles (PM_1N_1) , (PM_2N_2) , (PM_3N_3) , ..., contenant tous le point P , passent aussi par le point Q .

THÉORÈME II. — Soient (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) trois couples de points arbitraires pris sur une même sphère; si, par les deux premiers points (A_1, B_1) , on mène un cercle quelconque λ situé sur la sphère et que l'on considère les deux cercles passant respectivement par les points (A_2, B_2) , (A_3, B_3) et coupant le cercle λ aux deux mêmes points α_1, α_2 , ces derniers points décriront une cyclique sphérique du 4^{ème} ordre contenant les six points (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) .

THÉORÈME III. — Non-seulement la réciproque du théorème précédent est vraie; mais on peut, étant donné une cyclique sphérique quelconque Σ , trouver une infinité de systèmes de points (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) , qui peuvent servir à sa génération.

Voici un moyen de déterminer ces systèmes de points :

Soient P, Q deux points arbitraires de la cyclique, et (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) les trois couples de points d'intersection de cette même cyclique et de trois cercles quelconques de la sphère passant par (P, Q) ; ces trois couples de points répondent à la question.

Parmi les corollaires que l'on peut déduire de ce théorème, nous ne citerons que les suivants :

1° *Détermination de la tangente en un point quelconque.* — Il suffit évidemment de savoir la déterminer au point A_1 . Pour cela, on suivra la règle suivante :

(*) Courbes résultant de l'intersection d'une surface du second ordre et d'une sphère.

Soit A'_1 le second point de rencontre des cercles $(A_1A_2B_2)$, $(A_1A_3B_3)$; la tangente au point A_1 au cercle $(A_1B_1A'_1)$ est la tangente demandée.

M. Darboux, dans son ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 56 et 77, donne deux solutions différentes de ce même problème.

2° Détermination du cercle osculateur en un point quelconque. — Si l'on suppose les deux points A_1, B_1 réunis au point A dans la direction AT , on obtient le cercle osculateur en procédant comme il suit :

Soit A' le second point d'intersection des cercles (AA_2B_2) , (AA_3B_3) , le cercle qui est tangent en A à la droite AT et qui passe par le point A' est le cercle osculateur cherché (*).

THÉORÈMES SUR LES CYCLIDES DU 4^{ème} ORDRE (**).

THÉORÈME I. — Soit C un cercle de la cyclide Σ et C_1, C_2 deux cercles d'intersection de cette surface et de deux sphères passant par le 1^{er} cercle C ; si l'on considère la série des sphères passant par C_2 et coupant Σ suivant des cercles $E_1, E_2, E_3, \dots$, les sphères $(PE_1), (PE_2), (PE_3), \dots$, contenant un même point P du cercle C_1 , le contiennent en entier.

THÉORÈME II. — Soient C_1, C_2 deux cercles arbitraires pris dans l'espace; si, par deux points P_1, P_2 également arbitraires, on mène un cercle λ dont le plan et le rayon sont arbitraires, et que l'on considère les deux sphères passant respectivement par les cercles C_1, C_2 et coupant le cercle λ aux deux mêmes points α_1, α_2 , ces derniers points décrivent une cyclide du 4^{ème} ordre contenant les points P_1, P_2 et les deux cercles C_1, C_2 .

THÉORÈME III. — Non-seulement la réciproque du théorème précédent est vraie; mais on peut, étant donnée une cyclide quelconque Σ , trouver une infinité de systèmes de points P_1, P_2 et de cercles C_1, C_2 qui peuvent servir à sa génération.

Voici un moyen de les déterminer :

Soit C un cercle arbitraire de la cyclide et C', C_1, C_2 les trois cercles d'intersection de cette surface et de trois sphères quelconques passant par C ; deux points arbitraires P_1, P_2 pris sur la circonférence C' et les deux cercles C_1, C_2 répondent à la question.

Parmi les corollaires de cet important théorème, bornons-nous à remarquer, pour le moment, qu'il enseigne à déterminer le plan tangent en un point quelconque de la surface, au point P_1 par exemple. Il suffit, en effet, de mener en ce point les tangentes aux deux courbes planes que décrivent les points α_1, α_2 pour deux positions différentes du plan du cercle λ , problème que nous avons déjà appris à résoudre.

(*) M. Laguerre a déjà proposé, t. I, p. 101 du *Bulletin* de la Société, une autre solution:

(**) Surfaces du 4^o ordre ayant le cercle de l'infini par ligne double.

Seconde note sur la génération des cycliques ; par M. L. SALTEL.

(Séance du 14 avril 1875)

Dans une précédente communication, j'ai montré avec quelle facilité on peut décrire par points une cyclique Σ plane ou sphérique, lorsqu'on connaît l'un des systèmes de trois couples de points désignés par les lettres (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) , système de points que nous appellerons *associés*. L'objet de la note actuelle a pour but d'enseigner à déterminer, par la règle et le compas, l'un des systèmes de points, lorsqu'on définit la courbe par huit points $A_1, B_1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

LEMME I. — Décrire une cyclique Σ dans le cas particulier où les huit points $A_1, B_1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sont tels que les points $(A_1, B_1, 1, 2)$ sont sur un même cercle, ainsi que les points $(A_1, B_1, 3, 4)$.

Soient $5'$ le second point de rencontre des cercles $(1, 2, 5)$, $(3, 4, 5)$, et de même $6'$ le second point de rencontre des cercles $(1, 2, 6)$, $(3, 4, 6)$; les couples de points

$$(A_1, B_1), (5, 5'), (6, 6')$$

constituent un système de points *associés*.

LEMME II. — Décrire une cyclique passant par les sept points arbitraires $A_1, B_1, 1, 2, 3, 4, 5$.

Soient $3'$ le second point d'intersection des cercles $(A_1, B_1, 3)$, $(1, 2, 3)$, et de même $4'$ le second point d'intersection des cercles $(A_1, B_1, 4)$, $(1, 2, 4)$; soit en outre $5'$ le second point d'intersection des cercles $(3, 3', 5)$, $(4, 4', 5)$, les points

$$(A_1, B_1), (1, 2), (5, 5')$$

constituent un système de points *associés* à une cyclique Σ'_1 , passant par les sept points donnés, c'est-à-dire que l'on obtiendra les deux nouveaux points communs à cette courbe et à un cercle quelconque C , passant par (A_1, B_1) , en construisant, ce que nous avons appris à faire, les deux cercles passant respectivement par les points $(1, 2)$, $(5, 5')$ et par les deux mêmes points du cercle C_1 ; désignons par μ_1, γ_1 les deux points ainsi obtenus.

REMARQUE I. — En faisant jouer à deux des points $(1, 2, 3, 4, 5)$, à l'exception de $(1, 2)$, le même rôle que ces deux derniers viennent de jouer dans la construction de la courbe Σ'_1 , on obtiendrait une nouvelle courbe Σ'_2 passant par les sept points donnés et qui couperait le cercle C_1 en deux points μ'_1, γ'_1 , faciles à déterminer. Désignons par V le point de rencontre des droites $\mu_1\gamma_1, \mu'_1\gamma'_1$.

REMARQUE II. — Il est évident que *toutes* les cycliques passant par les sept points donnés $A_1, B_1, 1, 2, 3, 4, 5$ rencontrent le cercle C_1 en deux points, en ligne droite avec le point V .

REMARQUE III. — En suivant la même marche pour les sept points $A_1, B, 1, 2, 3, 4, 6$, on obtiendrait, relativement au cercle C_1 , un second point V' en ligne droite avec les deux points d'intersection de ce cercle et de toutes les cycliques passant par ces sept points.

COROLLAIRE I. — Il est manifeste que la ligne droite VV' rencontre le cercle C_1 aux deux mêmes points que la cyclique *cherchée*, c'est-à-dire la cyclique passant par les huit points $A_1, B, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

COROLLAIRE II. — Le cercle C_1 passant par les deux points A_1, B_1 , on peut dire que nous venons de résoudre ce problème :

Une cyclique étant définie par huit points, trouver les deux nouveaux points d'intersection de cette courbe et d'un cercle quelconque passant par deux de ces huit points.

COROLLAIRE III. — En cherchant les nouvelles intersections $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)$, de la cyclique définie par les huit points $A_1, A_2, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, avec deux cercles C_1, C_2 , passant par A_1, A_2 , et prenant deux des six points $1, 2, 3, 4, 5, 6$, les points $1, 2$, par exemple, on aura huit nouveaux points $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, 1, 2$, définissant la courbe, et qui seront dans les mêmes conditions que les huit points du lemme I.

COROLLAIRE IV. — *Une cyclique étant définie par huit points $A_1, B, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, on peut toujours trouver un système de trois couples de points associés, parmi lesquels peuvent figurer deux des points donnés.*

C'est là le problème que nous nous étions proposé.

Sur les foyers des cycliques; par M. L. SALTEL.

(Séance du 14 avril 1875)

L'objet de cette nouvelle communication est d'enseigner à déterminer géométriquement le foyer singulier d'une cubique circulaire, définie par sept points, et d'indiquer une voie qui probablement conduira à la détermination de ces mêmes points dans les cycliques du 4^{ème} ordre.

THÉORÈME I. — Soient Δ une parallèle quelconque à l'asymptote réelle d'une cubique circulaire Σ , et C, D ses deux points de rencontre avec cette courbe. Si, par ces deux points, on mène autant de cercles que l'on veut, coupant Σ aux points $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3), \dots$, les perpendiculaires élevées sur les milieux des droites $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3), \dots$ passent toutes par le foyer singulier de la cubique.

THÉORÈME II. — Si, du foyer singulier d'une cubique circulaire comme centre, on décrit des cercles de rayons arbitraires, le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les cordes que ces cercles déterminent sur la cyclique, est un cercle.

PROBLÈME. — Reconnaitre si un point donné P est foyer d'une cyclique du 4^{ème} ordre, définie par huit points.

Notre détermination d'un conique qui passe par les quatre points communs à un cercle et à une cyclique, s'appliquant tout aussi bien que le rayon du cercle soit nul ou non nul, on en déduit la solution suivante du problème en question :

Pour reconnaître si un point P est le foyer d'une cyclique Σ du 4^{ème} ordre, on considérera ce point comme un cercle de rayon nul, on déterminera une conique M passant par ses points communs avec Σ . Si P est un foyer ordinaire de Σ , il devra être un foyer de la conique M ; si P est un foyer singulier, la conique M devra être un cercle.

NOTA. — Si les trois couples de points associés (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) sont respectivement sur trois cercles concentriques, le centre de ce cercle est un foyer singulier de Σ .

Sur différentes formes que l'on peut donner à l'intégrale de l'équation d'Euler, par M. LAGUERRE.

(Séance du 17 mars 1875.)

1. Soit un polynôme du quatrième degré en x que je représenterai par la forme homogène $U(x, y)$, où y désigne une constante égale à l'unité et introduite pour l'homogénéité des formules, l'équation d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{U(x, y)}} = \frac{d\xi}{\sqrt{U(\xi, \eta)}}$$

a, comme je l'ai montré précédemment (*), pour intégrale générale l'équation suivante

$$(1) \quad 6\alpha U_2 + 36H_2 + (3S - \alpha^2)\omega^2 = 0,$$

où α représente une constante arbitraire, ω le déterminant $x\eta - y\xi$, U_2 , H_2 les émanants principaux de U et du hessien H de la forme donnée, et S son invariant quadratique.

Cela posé, on a l'identité suivante, que l'on vérifiera facilement,

$$(2) \quad U(x, y)U(\xi, \eta) - U_2^2 = 4H_2\omega^2 + \frac{8}{3}\omega^4;$$

je l'écrirai plus simplement sous la forme suivante

$$UU' - U_2^2 = 4H_2\omega^2 + \frac{8}{3}\omega^4,$$

d'où

$$S\omega^4 + 12H_2\omega^2 = 3UU' - 3U_2^2.$$

(*) Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie des courbes tracées sur une surface du second ordre. (Bulletin de la Soc. math., t. I, p. 35.)

Multiplions maintenant par ω^2 le premier membre de l'équation (1), et remplaçons $S\omega^4 + 12H_2\omega^2$ par sa valeur tirée de la relation précédente, il viendra

$$6\alpha U_2 \omega^2 - \alpha^2 \omega^4 + 9UU' - 9U_2^2 = 0,$$

ou

$$9UU' = (3U_2 - \alpha\omega^2)^2;$$

ou encore

$$(3) \quad U_2 - \sqrt{UU'} = \frac{\alpha}{3} \omega^2.$$

2. Cette nouvelle forme de l'équation d'Euler peut elle-même se transformer d'une façon remarquable.

Décomposons U d'une façon quelconque en un produit de deux facteurs du second degré, en posant

$$U = f(x, y) \varphi(x, y),$$

où

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

et

$$\varphi(x, y) = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2.$$

On aura évidemment

$$UU' = f(x, y) \varphi(x, y) / f(\xi, \eta) \varphi(\xi, \eta);$$

d'autre part, en désignant par Δ l'invariant quadratique simultané des deux formes f et φ , $AC' + CA' - 2BB'$, on vérifiera facilement l'identité suivante

$$f(x, y) \varphi(\xi, \eta) + f(\xi, \eta) \varphi(x, y) = 2U_2 + \omega^2 \frac{\Delta}{3}.$$

Portons ces valeurs de U_2 et de UU' dans l'équation (3), elle deviendra, en faisant pour abrégier $f(\xi, \eta) = f'$ et $\varphi(\xi, \eta) = \varphi'$,

$$f\varphi' + f'\varphi - 2\sqrt{f\varphi f'\varphi'} = \omega^2 \left(\frac{2\alpha + \Delta}{3} \right);$$

d'où

$$(4) \quad \sqrt{f\varphi'} - \sqrt{f'\varphi} = \beta\omega,$$

β désignant une constante arbitraire.

D'où la proposition suivante, où j'ai fait disparaître les quantités auxiliaires y et η :

Si l'on décompose d'une façon quelconque le polynôme du quatrième degré, $F(x)$, en deux facteurs du second degré $f(x)$ et $\varphi(x)$, l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = \frac{d\xi}{\sqrt{F(\xi)}}$$

est

$$\frac{\sqrt{f(x)\varphi(\xi)} - \sqrt{f(\xi)\varphi(x)}}{x - \xi} = \text{constante.}$$

J'avais déjà déduit cette proposition de considérations purement géométriques, dans une note *Sur les propriétés des coniques qui se rattachent à l'équation d'Euler*, insérée dans les *Nouv. ann. de math.*, 1872.

Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions; par M. TCHEBYCHEF.

(Séance du 21 juillet 1875)

Si une fonction entière, entre deux limites quelconques de la variable, s'écarte peu de zéro, et qu'elle ait une valeur considérable en dehors de ces limites; il est certain que la fonction est d'un degré élevé. Quelle est donc la formule qui donne la limite du degré de la fonction entière, d'après ses écarts de zéro, pour des valeurs de la variable comprises entre certaines limites, et sa valeur au delà de ce champ? En cherchant à résoudre ce problème d'après les méthodes exposées dans notre mémoire sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions, nous sommes parvenu à ce théorème très-simple :

THÉORÈME. — Si $f(x)$ est une fonction entière du degré n qui, depuis $x = -l$ jusqu'à $x = +l$, ne sorte pas des limites $-L$ et $+L$, et que, pour toutes les valeurs de x en dehors des limites nommées $x = -l$, $x = +l$, les valeurs de la fonction $f(x)$ soient en dehors des limites $-L$ et $+L$, on aura

$$\left(\frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 - l^2}}}{\sqrt{x^2 - \sqrt{x^2 - l^2}}} \right)^n \geq \frac{\sqrt{f^2(x) + \sqrt{f^2(x) - L^2}}}{\sqrt{f^2(x) - \sqrt{f^2(x) - L^2}}},$$

en donnant aux radicaux les valeurs positives.

Essai sur la géométrie à n dimensions; par M. CAMILLE JORDAN.

(Séance du 12 mai 1875)

On sait que la fusion opérée par Descartes entre l'algèbre et la géométrie ne s'est pas montrée moins féconde pour l'une de ces sciences que pour l'autre.

Car, si d'une part les géomètres ont appris, au contact de l'analyse, à donner à leurs recherches une généralité jusque-là inconnue, les analystes, de leur côté, ont trouvé un puissant secours dans les images de la géométrie,

tant pour découvrir leurs théorèmes que pour les énoncer sous une forme simple et frappante.

Ce secours cesse lorsqu'on passe à la considération des fonctions de plus de trois variables; aussi la théorie de ces fonctions est-elle relativement fort en retard. Le moment semble venu de combler cette lacune en généralisant les résultats déjà obtenus pour ce cas de trois variables. Un grand nombre de géomètres s'en sont déjà occupés d'un manière plus ou moins immédiate. Nous ne connaissons cependant aucun travail d'ensemble sur ce sujet (*).

Nous nous proposons, dans le présent essai, de montrer comment les principales formules de la théorie de la ligne droite et du plan doivent être généralisées pour s'étendre aux fonctions linéaires d'un nombre quelconque de variables. L'étude de ces questions élémentaires doit naturellement précéder toute recherche relative aux fonctions de degré supérieur.

Bien que ces recherches soient purement algébriques, nous avons cru utile d'emprunter, ainsi que nos devanciers, quelques expressions à la géométrie. Ainsi, nous considérons un *point* comme défini dans l'espace à n dimensions, par les valeurs de n *coordonnées* $x_1, \dots, x_n$. Une équation linéaire entre ces coordonnées définira un plan; k équations linéaires simultanées, un k -*plan*; $n - 1$ équations, une droite. La *distance* de deux points sera $\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \dots}$; etc.

Ces définitions posées, nous étudions, dans la section I de notre Mémoire, les divers degrés de parallélisme qui peuvent exister entre deux multiplans.

Dans la seconde section, nous donnons les conditions de perpendicularité.

Dans la troisième, les formules de transformation des coordonnées.

Les sections suivantes renferment des résultats plus intéressants.

Les sections IV et V sont consacrées à l'étude des relations indépendantes du choix des axes (les coordonnées restant rectangulaires), qui peuvent exister entre deux multiplans. Nos principaux résultats consistent dans les propositions suivantes :

1° Un système formé d'un k -plan P_k et d'un l -plan P_l passant par un même point de l'espace a ρ invariants distincts, ρ étant le plus petit des nombres $k, l, n - k, n - l$. On peut considérer ces invariants comme définissant les angles des deux multiplans.

2° Les divers plans perpendiculaires à P_k et à P_l forment respectivement par leurs intersections un $n - k$ plan P_{n-k} et un $n - l$ plan P_{n-l} , formant entre eux les mêmes angles que P_k et P_l .

3° Si P_k et P_l n'ont pas de point commun, on aura un invariant de plus, à savoir leur plus courte distance. Cet invariant s'exprime par une fraction,

(*) Un seul chapitre de cette nouvelle géométrie nous paraît pouvoir être considéré comme à peu près achevé; c'est celui de la courbure des surfaces. (Voir la thèse de M. Morin, 1867, et les mémoires de M. Sophus Lie, *Göttinger Nachrichten*, 1871.)

dont le numérateur et le dénominateur sont des sommes de carrés de déterminants.

Dans la section VI, nous donnons le système des formules qui relient entre eux les angles mutuels des divers multiplans formés avec n plans donnés quelconques (se coupant au même point). Ces formules se réduisent, pour $n=3$, à celles de la trigonométrie sphérique. Nous les rattachons à la considération du déterminant de la forme quadratique qui donne la distance de deux points (les n plans donnés étant pris pour plans coordonnés).

Dans la section VII, nous montrons comment une substitution orthogonale de déterminant 1 peut être ramenée par un changement d'axes rectangulaires à une forme canonique simple, dépendant de $\frac{n}{2}$ invariants si n est pair, de $\frac{n-1}{2}$ s'il est impair. Nous donnons les équations différentielles partielles auxquelles satisfont ces invariants. De cette recherche, nous déduisons entre autres résultats la généralisation des théorèmes suivants :

Tout mouvement plan se réduit à une rotation autour d'un point.

Tout mouvement dans l'espace est un mouvement hélicoïdal.

Nous en tirons encore la généralisation de la loi de réciprocity signalée par M. Chasles, et qui a servi de fondement à ses belles recherches sur le mouvement d'un corps solide.

Nous terminons en donnant les lois de la composition des mouvements infiniment petits dans l'espace à 4 dimensions. Le résultat auquel nous arrivons se formule dans ce théorème :

Une rotation R, autour d'un point dans l'espace à 4 dimensions, peut être représentée dans l'espace à 3 dimensions par deux droites A et B, de grandeur et de direction convenables. Deux rotations R_1 et R_2 , respectivement représentées par les droites A_1 et B_1 , A_2 et B_2 , auront pour résultante une rotation représentée par les droites A, résultante de A_1 et A_2 , et B, résultante de B_1 et B_2 (ces droites étant combinées suivant la règle du parallélogramme).

I. DÉFINITIONS. — PARALLÉLISME.

1. Nous définirons la position d'un point dans l'espace à n dimensions au moyen de n coordonnées $x_1, \dots, x_n$.

Une équation linéaire entre ces coordonnées définira un *plan* ; deux équations linéaires simultanées, distinctes, et non incompatibles, définiront un *bipplan* ; k équations, un *k-plan* ; $n-1$ équations définiront une *droite* ; n équations, un point.

On pourra comprendre tous les êtres géométriques ci-dessus sous le nom générique de *multiplans*.

2. Soient

$$(1) \quad A_1 = 0, \dots, A_k = 0$$

les équations d'un k -plan P_k ; en les combinant linéairement, on obtiendra une infinité d'équations de la forme

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k = 0.$$

Les plans représentés par ces diverses équations auront évidemment P_k pour intersection commune, et nous les appellerons pour abrégier *les plans générateurs de P_k* . Leurs intersections deux à deux, trois à trois, ..., $k-1$ à $k-1$, donneront une infinité de biplans, de triplans, etc., contenant P_k , et qu'on pourra appeler *les biplans, les triplans générateurs, etc., de P_k* .

Il est clair que l'on pourra prendre pour définir P_k , au lieu des équations (1), les équations de k plans générateurs quelconques

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k = 0, \quad \lambda'_1 A_1 + \dots + \lambda'_k A_k = 0, \dots,$$

pourvu que le déterminant des coefficients λ ne soit pas nul.

D'autre part, soit k' un entier quelconque $> k$, et ne dépassant pas n . Si l'on joint aux équations (1), qui déterminent P_k , $k' - k$ nouvelles équations $A_{k+1} = 0, \dots, A_{k'} = 0$, l'ensemble de ces équations (supposées distinctes et non incompatibles) déterminera un k' -plan contenu en entier dans P_k . Nous dirons que les k' -plans ainsi obtenus sont *les k' -plans de P_k* .

Nous remarquerons enfin que les coordonnées courantes d'un k -plan quelconque

$$A_1 = 0, \dots, A_k = 0,$$

pourront être exprimées linéairement en fonction de $n - k$ variables auxiliaires indépendantes. Il suffira en effet de poser

$$A_{k+1} = \lambda_1, \dots, A_n = \lambda_{n-k},$$

$A_{k+1}, \dots, A_n$ étant des fonctions linéaires quelconques de $x_1, \dots, x_n$, et l'on aura un système de n équations qui permettront d'exprimer ces coordonnées en fonction des nouvelles variables λ .

3. *Un plan sera déterminé en général par n points.* En effet, l'équation générale du plan contient $n + 1$ coefficients, dont les rapports seront déterminés par les n équations linéaires que l'on obtient en substituant successivement dans l'équation les valeurs des coordonnées des n points donnés.

Un k -plan sera déterminé par $n - k + 1$ points.

En effet, considérons un plan quelconque assujéti à passer par les $n - k + 1$ points. Cette condition donnera entre les $n + 1$ coefficients du plan $n - k + 1$ équations linéaires; éliminant $n - k + 1$ coefficients au

moyen de ces équations de condition, il restera dans l'équation du plan k coefficients arbitraires. Donc l'équation générale des plans passant par les $n - k + 1$ points donnés sera de la forme

$$(2) \quad \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k = 0,$$

et le k -plan $A_1 = \dots = A_k = 0$, intersection commune de ces plans, passera par les $n - k + 1$ points donnés. D'ailleurs ce k -plan sera le seul à jouir de cette propriété; car si un k -plan P_k contient les points donnés, ses plans générateurs les contiendront *a fortiori*, ils seront donc de la forme (2); et P_k se confondra avec le k -plan $A_1 = \dots = A_k = 0$, intersection commune de ces plans.

4. Deux plans donnés par les équations

$$\begin{aligned} A &= a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + \alpha = 0, \\ B &= b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + \beta = 0, \end{aligned}$$

se couperont en général suivant un biplan. Mais on doit excepter le cas où l'on aurait

$$\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n},$$

car les deux équations $A = 0, B = 0$ seront incompatibles. On dira dans ce cas que les deux plans sont *parallèles*.

Enfin, si l'on avait

$$\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta},$$

les deux équations $A = 0, B = 0$ n'en formeraient plus qu'une seule, et les deux plans seraient non-seulement parallèles, mais coïncidents.

5. Soient P_k et P_l deux multiplans quelconques. Si, parmi les plans générateurs de P_k , il en est qui soient parallèles à ceux de P_l , ils engendreront un multiplan.

Soient en effet

$$C_1 = 0, \dots, C_p = 0$$

des plans générateurs de P_k parallèles à des plans générateurs de P_l et choisis de telle sorte : 1° qu'ils soient indépendants les uns des autres, c'est-à-dire ne soient liés par aucune équation linéaire identique

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_p C_p = 0;$$

2° qu'il n'existe aucun plan générateur de P_k indépendant de ceux-là et parallèle à un plan générateur de P_l . Par définition, P_l aura parmi ses plans générateurs des plans

$$C_1 = \delta_1, \dots, C_p = \delta_p$$

respectivement parallèles aux précédents. P_k aura parmi ses plans générateurs tous les plans

$$(3) \quad \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_p C_p = 0,$$

qui engendrent le ρ -plan

$$C_1 = 0, \dots, C_p = 0,$$

que nous désignerons par P_p . De son côté, P_l aura parmi ses plans générateurs ceux de la forme

$$(4) \quad \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_p C_p = \lambda_1 \delta_1 + \dots + \lambda_p \delta_p$$

respectivement parallèles aux précédents et qui engendrent le ρ -plan

$$C_1 = \delta_1, \dots, C_p = \delta_p,$$

que nous pourrions désigner par P'_p .

Donc, pour qu'un plan générateur de P_k soit parallèle à un plan générateur de P_l , il sera non-seulement nécessaire, mais suffisant, qu'il soit un plan générateur de P_p . Et réciproquement, pour qu'un plan générateur de P_l soit parallèle à l'un de ceux de P_k , il sera nécessaire et suffisant qu'il soit l'un des plans générateurs de P'_p .

Nous exprimerons cette relation en disant que deux multiplans P_k et P_l ont entre eux un *parallélisme d'ordre* ρ .

Nous dirons d'une manière absolue que P_k est *parallèle* à P_l , si tous ses plans générateurs sont parallèles à ceux de P_l . Il faut évidemment pour cela que l'on ait $k \leq l$. Si $k = l$, il est clair que P_l sera réciproquement parallèle à P_k .

Si l'on a à la fois $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$, les divers plans de P_p seront non-seulement parallèles à ceux de P'_p , mais coïncidents; et P_l et P_k seront contenus dans le même ρ -plan P_p .

Au contraire, si λ_1 par exemple est différent de zéro, il faudra pour que les plans (3) et (4) se confondent, que l'on ait la relation

$$\lambda_1 \delta_1 + \dots + \lambda_p \delta_p = 0.$$

Déterminant λ_1 par cette relation et substituant dans (3), on aura

$$\lambda_2 \left(C_2 - \frac{\delta_2}{\delta_1} C_1 \right) + \dots + \lambda_p \left(C_p - \frac{\delta_p}{\delta_1} C_1 \right) = 0$$

pour l'équation générale des plans générateurs communs à P_k et à P_l ; et l'on voit par là que ces plans ne seront autres que les plans générateurs du $\rho - 1$ -plan

$$C_2 - \frac{\delta_2}{\delta_1} C_1 = 0, \dots, C_p - \frac{\delta_p}{\delta_1} C_1 = 0,$$

lequel contiendra P_l et P_k .

En outre, P_k et P_l seront dans un même ρ -plan, si l'équation (8) est une conséquence des équations (7).

8. Supposons maintenant que l'on ait $k + l > n$. On aura un parallélisme d'ordre $k + l - n$ dans le cas général où les équations (7) sont toutes distinctes; un parallélisme d'ordre $k + l - p$ si elles se réduisent à p équations distinctes. Enfin P_k et P_l seront dans un même ρ -plan si l'équation (8) est une conséquence des équations (7).

9. Pour écrire les conditions d'un parallélisme d'ordre quelconque, on n'aura donc qu'à exprimer que les équations (7) se réduisent à p distinctes. Or, on sait que pour cela il faut et il suffit : 1° que l'un au moins des mineurs de degré p formés avec les coefficients de ces équations soit différent de zéro; 2° que tous les mineurs de degré $p + 1$ s'annulent.

Pour que P_k et P_l soient dans un même ρ -plan, il faudra de plus que l'équation (8) étant adjointe au système des équations (7), les nouveaux mineurs de degré $p + 1$ où figurent les coefficients de cette nouvelle équation s'annulent comme les précédents.

10. Si deux multiplans P_k et P_l n'ont aucun parallélisme, ils se coupent suivant un multiplan P_{k+l} .

En effet, par hypothèse, on ne peut satisfaire à l'équation

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k = \mu_1 B_1 + \dots + \mu_l B_l + \text{constante},$$

ou, ce qui revient au même, à celle-ci

$$\lambda_1 (A_1 - \alpha_1) + \dots + \lambda_k (A_k - \alpha_k) = \mu_1 (B_1 - \beta_1) + \dots + \mu_l (B_l - \beta_l).$$

Donc les $k + l$ fonctions $A_1 - \alpha_1, \dots, A_k - \alpha_k, B_1 - \beta_1, \dots, B_l - \beta_l$ seront distinctes, et les équations

$$A_1 = 0, \dots, A_k = 0, B_1 = 0, \dots, B_l = 0$$

lesquelles peuvent se mettre sous la forme

$$A_1 - \alpha_1 = -\alpha_1, \dots, B_l - \beta_l = -\beta_l,$$

seront distinctes et compatibles entre elles, et détermineront un $k + l$ -plan.

11. Si P_k et P_l ont un parallélisme d'ordre ρ , sans être dans un même ρ -plan, ils ne se couperont pas.

En effet, P_k et P_l ont par hypothèse des plans générateurs parallèles, mais non coïncidents, $C_1 = 0$ et $C_1 = \delta_1$. Les points de l'intersection devraient satisfaire à ces deux équations, qui sont incompatibles. Si donc P_k et P_l ont un parallélisme d'ordre ρ et se coupent, ils seront dans un même ρ -plan.

12. Si P_k et P_l sont dans un même ρ -plan, ils se couperont suivant un $k + l - \rho$ -plan.

Soit en effet

$$C_1 = \dots = C_\rho = 0$$

Les ρ premières équations de ce système sont le résultat de la substitution des valeurs (17) dans les équations $C_1 = 0, \dots, C_\rho = 0$; et toutes les valeurs de $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ qui satisfont à ces ρ équations doivent satisfaire identiquement aux autres équations du système; ce qui donne les relations

$$L_{\rho+1,1} = 0, \dots, L_k = 0,$$

lesquelles sont évidemment symétriques par rapport aux a et aux b , et expriment que *chacun des plans $A_{\rho+1}, \dots, A_k$ est perpendiculaire à chacun des plans $B_{\rho+1}, \dots, B_l$.*

21. *Tout k -plan P_k peut être déterminé d'une infinité de manières par l'intersection de k -plans rectangulaires.*

Soit en effet $A_1 = 0$ un quelconque des plans générateurs de P_k . Nous avons vu que P_k contient un $k-1$ -plan P_{k-1} perpendiculaire à P_k . Soit A_2 l'un quelconque des plans générateurs de P_{k-1} ; il sera perpendiculaire à A_1 . D'ailleurs P_k contiendra un $k-2$ -plan P_{k-2} perpendiculaire au biplan (A_1, A_2) . Soit A_3 un de ses plans générateurs; il sera perpendiculaire à A_1 et à A_2 . On pourra de même déterminer dans P_k un nouveau plan A_4 perpendiculaire aux trois précédents; etc.

En posant $k = n$ dans la proposition qui précède, on voit que *par un point quelconque de l'espace on peut faire passer une infinité de systèmes de plans rectangulaires.*

22. *Soient p un point quelconque; q sa projection sur un multiplan P_k ; r un point quelconque de P_k ; on aura entre les distances des trois points p, q, r la relation*

$$\overline{pr}^2 = \overline{pq}^2 + \overline{qr}^2.$$

En effet, soient $y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n$ les coordonnées des trois points p, q, r ; et supposons P_k défini par les équations (14); on aura

$$\begin{aligned} \overline{pr}^2 &= (y_1 - \xi_1)^2 + \dots + (y_n - \xi_n)^2 \\ &= (y_1 - x_1 + x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (y_n - x_n + x_n - \xi_n)^2 \\ &= \overline{pq}^2 + \overline{qr}^2 + 2\{(y_1 - x_1)(x_1 - \xi_1) + \dots + (y_n - x_n)(x_n - \xi_n)\}. \end{aligned}$$

Mais, si l'on remplace $y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n$ par leurs valeurs tirées des équations (17), le terme entre parenthèses deviendra

$$\lambda_1\{a_{11}(x_1 - \xi_1) + \dots + a_{1n}(x_n - \xi_n)\} + \dots + \lambda_k\{a_{k1}(x_1 - \xi_1) + \dots + a_{kn}(x_n - \xi_n)\},$$

expression dans laquelle les multiplicateurs de $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ s'annulent évidemment; $x_1, \dots, x_n$ et $\xi_1, \dots, \xi_n$ satisfaisant aux équations (14).

23. *Soit P_{k+1} un multiplan contenu dans P_k ; la projection de p sur P_{k+1} tombera au même point s que la projection de q .*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta,$$

$$\frac{d\Delta}{da_{rs}} = b_{rs},$$

$$\sqrt{b_{r1}^2 + \dots + b_{rn}^2} = M_r;$$

on déduira des équations (36) et (37) les suivantes

$$x_1 - \xi_1 = \frac{b_{11}L}{\Delta}, \dots, x_n - \xi_n = \frac{b_{1n}L}{\Delta},$$

$$X_1 = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_n - \xi_n)^2} = \frac{M_1}{\Delta} L = \frac{M_1}{\Delta} (a_{11}\xi_1 + \dots + a_{1n}\xi_n - a_1).$$

On trouvera de même, pour toute valeur de r ,

$$(38) \quad X_r = \frac{M_r}{\Delta} (a_{r1}\xi_1 + \dots + a_{rn}\xi_n - a_r),$$

Renversant ces égalités, il viendra

$$(39) \quad \xi_r = \frac{b_{1r}}{M_1} X_1 + \dots + \frac{b_{nr}}{M_n} X_n + \frac{b_{1r}a_1 + \dots + b_{nr}a_n}{\Delta}.$$

27. Il est aisé d'exprimer la distance de deux points en fonction des nouvelles coordonnées.

Soient, en effet, $\xi_1, \dots, \xi_n$ et $X'_1, \dots, X'_n$ les coordonnées d'un second point. Elles satisferont aux équations (36) et (39); on aura, par suite,

$$\xi_r - \xi'_r = \frac{b_{1r}}{M_1} (X_1 - X'_1) + \dots + \frac{b_{nr}}{M_n} (X_n - X'_n).$$

La distance D des deux points sera donnée par la formule

$$D^2 = \sum_r (\xi_r - \xi'_r)^2 = \sum_r (X_r - X'_r)^2 + 2 \sum_{rs} \frac{b_{r1}b_{s1} + \dots + b_{rn}b_{sn}}{M_r M_s} (X_r - X'_r)(X_s - X'_s).$$

Cette formule se simplifie lorsque les nouveaux plans coordonnés sont orthogonaux.

On a, en effet, par définition,

$$(40) \quad a_{r1}a_{s1} + \dots + a_{rn}a_{sn} = 0, \quad \text{si } r \neq s.$$

On peut d'ailleurs, sans rien changer au système des nouveaux plans, multiplier l'équation de chacun d'eux par une constante, telle que l'on ait

$$a_{r1}^2 + \dots + a_{rn}^2 = 1.$$

Mais alors $a_{11}, \dots, a_{nn}$ seront les coefficients d'une substitution orthogonale; et, d'après les propriétés connues de ces substitutions, on aura

$$\begin{aligned} a_{1r}^2 + \dots + a_{nr}^2 &= 1, \quad a_{1r}a_{1s} + \dots + a_{nr}a_{ns} = 0, \\ \Delta &= \pm 1, \quad \frac{b_{rs}}{\Delta} = a_{sr}, \quad M_r = \sqrt{\Delta^2(a_{1r}^2 + \dots + a_{nr}^2)} = 1, \\ (41) \quad \frac{b_{r1}b_{s1} + \dots + b_{rn}b_{sn}}{M_r M_s} &= \Delta^2(a_{1r}a_{1s} + \dots + a_{nr}a_{ns}) = 0; \end{aligned}$$

de sorte que D^2 se réduit à une somme de carrés.

Réciproquement, si les équations (41) sont satisfaites, les équations (39) représenteront une substitution orthogonale. La substitution réciproque définie par les équations (38) sera aussi orthogonale. Les équations (40) seront donc satisfaites; les nouveaux plans coordonnés seront donc perpendiculaires entre eux.

IV. INVARIANTS ANGULAIRES.

28. La transformation des coordonnées dans l'espace à n dimensions présente les mêmes avantages que dans la géométrie ordinaire. Elle permet de changer les équations qui représentent une même figure, et de les simplifier par un choix convenable des indéterminées qui figurent dans les transformations.

Deux figures quelconques tracées dans l'espace sont considérées comme *pareilles*, lorsqu'en les rapportant à des systèmes de coordonnées orthogonales, convenablement choisis pour chacune d'elles, on peut les représenter par les mêmes équations.

Si les systèmes orthogonaux auxquels ces deux figures sont respectivement rapportées sont tels que l'on puisse passer de l'un à l'autre par une substitution orthogonale de coefficient 1, ces deux figures seront considérées comme *égales* et ne différant que par leur situation dans l'espace; elles seront *symétriques*, si le déterminant de la substitution est égal à -1 .

29. *Tous les k -plans sont à la fois égaux et symétriques.* Nous avons vu en effet qu'un k -plan quelconque P_k peut être considéré comme résultant de l'intersection de k plans rectangulaires. En un point quelconque de P_k , élevons le P_{n-k} plan qui lui est perpendiculaire. Il sera lui-même l'intersection de $n-k$ plans perpendiculaires entre eux, et perpendiculaires aux précédents. Prenant les n plans ainsi définis pour plans coordonnés, les équations de P_k prendront la forme

$$x_1 = 0, \dots, x_k = 0.$$

Les équations d'un k -plan quelconque étant réductibles à cette même forme, ce k -plan sera identique ou symétrique à P_k . Mais il sera à la fois

identique et symétrique; car P_i est symétrique à lui-même, ses équations n'étant pas altérées lorsqu'on y change x en $-x$ (opération qui est une substitution orthogonale de déterminant -1).

30. Considérons maintenant un système de deux plans P, Q qui se coupent. Prenons pour origine l'un des points de l'intersection, pour plan des x_1 le plan P , pour plan des x_2 un plan rectangulaire à celui-là passant par le biplan (P, Q) , et pour les autres plans coordonnés, $n-2$ plans rectangulaires, situés dans le $n-2$ -plan perpendiculaire à (P, Q) . Les équations des deux plans prendront la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ ax_1 + bx_2 &= 0, \end{aligned}$$

ou, en divisant la seconde équation par $\sqrt{a^2 + b^2}$, ce qui est permis, et posant $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha$, $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$,

$$(42) \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

La forme canonique à laquelle nous pouvons réduire les équations d'un système de deux plans contient donc comme paramètre un angle α . Donc tous les systèmes de deux plans ne sont pas pareils, mais différent entre eux par un élément caractéristique.

31. On pouvait voir *a priori* qu'il en devait être ainsi. Considérons en effet les équations de deux plans sous leur forme générale

$$\begin{aligned} P &= a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + \alpha = 0, \\ Q &= b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + \beta = 0, \end{aligned}$$

Soient $y_1, \dots, y_n$ les coordonnées de l'un quelconque q des points de Q . Sa projection $x_1, \dots, x_n$ sur P sera donnée par les relations

$$x_1 - y_1 = \lambda a_1, \dots, x_n - y_n = \lambda a_n,$$

λ étant une constante à déterminer par la condition que $x_1, \dots, x_n$ satisfassent à l'équation $P = 0$, ou ce qui revient au même, à la suivante

$$a_1(x_1 - y_1) + \dots + a_n(x_n - y_n) = L.$$

en posant, pour abréger, $L = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n - \alpha$.

On déduira de là

$$\lambda = \frac{L}{a_1^2 + \dots + a_n^2},$$

et la distance D des deux points $y_1, \dots, y_n$ et $x_1, \dots, x_n$ sera donnée par la formule

$$(43) \quad D^2 = \lambda^2(a_1^2 + \dots + a_n^2) = \frac{L^2}{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

Cherchons maintenant la distance Δ de q à l'intersection des plans P, Q . La projection $z_1, \dots, z_p$ du point p sur son intersection sera donnée par les relations

$$z_1 - y_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \dots, z_n - y_n = \lambda a_n + \mu b_n,$$

les paramètres λ, μ devant être déterminés par la condition que $z_1, \dots, z_n$ satisfassent aux relations $P=0, Q=0$, ou, ce qui revient au même, à celles-ci

$$\begin{aligned} a_1(z_1 - y_1) + \dots + a_n(z_n - y_n) &= L, \\ b_1(z_1 - y_1) + \dots + b_n(z_n - y_n) &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\lambda \Sigma_r a_r^2 + \mu \Sigma_r a_r b_r = L, \quad \lambda \Sigma_r a_r b_r + \mu \Sigma_r b_r^2 = 0,$$

d'où

$$\lambda = \frac{\Sigma b_r^2 \cdot L}{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2 - (\Sigma a_r b_r)^2}, \quad \mu = - \frac{\Sigma a_r b_r \cdot L}{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2 - (\Sigma a_r b_r)^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression

$$\Delta^2 = (\lambda a_1 + \mu b_1)^2 + \dots + (\lambda a_n + \mu b_n)^2,$$

il vient, en supprimant le facteur commun $\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2 - (\Sigma a_r b_r)^2$,

$$(44) \quad \Delta^2 = \frac{\Sigma b_r^2 \cdot L^2}{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2 - (\Sigma a_r b_r)^2}.$$

Cette équation, comparée à l'équation (43), donnera

$$(45) \quad \frac{D^2}{\Delta^2} = \frac{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2 - (\Sigma a_r b_r)^2}{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2}.$$

Le rapport $\frac{D^2}{\Delta^2}$ est donc indépendant de la situation du point q dans le plan Q , et égal à une constante K .

Remplaçons maintenant le système actuel de coordonnées par un autre système quelconque, également rectangulaire. On aura $\frac{D^2}{\Delta^2} = K'$, K' étant la fonction analogue à K formée avec les nouveaux coefficients. Mais les distances D et Δ ne sont pas altérées par les substitutions orthogonales; on aura donc $K = K'$. Donc la fonction K est un *invariant* pour toute substitution orthogonale; et deux systèmes de deux plans ne pourront être pareils, s'ils donnent des valeurs différentes de cet invariant.

Les deux plans étant mis sous la forme canonique (42), il viendra

$$K = \sin^2 \alpha.$$

La quantité

$$1 - K^2 = \frac{(\sum a_r b_r)^2}{\sum a_r^2 \sum b_r^2} = \cos^2 \alpha$$

sera un autre invariant, symétrique comme le premier par rapport aux coefficients des deux plans.

L'angle α peut être appelé *l'angle des deux plans*.

32. Il est à remarquer que si $\sin^2 \alpha$ et $\cos^2 \alpha$ sont des invariants, il n'en est pas de même de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$, coefficients de l'équation canonique du plan Q. En effet, en changeant le signe d'une des coordonnées x_1, x_2 , ou de toutes deux, on pourra changer le signe de ces coefficients.

33. Passons à la considération d'un système de deux multiplans P_k, P_l , ayant un point commun π . Pour traiter la question dans toute sa généralité, nous supposons :

1° Que P_k et P_l sont dans un même ρ -plan P_ρ (sans être dans un même $\rho + 1$ -plan);

2° Que les multiplans P_{n-k}, P_{n-l} élevés par le point π perpendiculairement à P_k et à P_l sont dans un même σ -plan P_σ (sans être dans un même $\sigma + 1$ plan);

3° Que P_{n-k} et P_l sont dans un même τ -plan P_τ (sans être dans un même $\tau + 1$ -plan);

4° Que P_{n-l} et P_k sont dans un même ν -plan P_ν (sans être dans un même $\nu + 1$ -plan).

Nous prendrons pour plans coordonnés :

1° ρ plans rectangulaires

$$x_1 = 0, \dots, x_\rho = 0$$

pris parmi les plans générateurs de P_ρ ;

2° σ plans rectangulaires

$$y_1 = 0, \dots, y_\sigma = 0$$

pris parmi les plans générateurs de P_σ ;

3° τ plans rectangulaires

$$z_1 = 0, \dots, z_\tau = 0$$

pris parmi les plans générateurs de P_τ ;

4° ν plans rectangulaires

$$u_1 = 0, \dots, u_\nu = 0$$

pris parmi les plans générateurs de P_ν ;

Ce plan serait perpendiculaire à P_α et par suite à P_k ; et en joignant son équation à celles qui déterminent P_τ , on aurait un $\tau + 1$ plan contenant à la fois P_{n-k} et P_l , contrairement à ce qui a été supposé.

Si γ était $< \alpha$, on pourrait déterminer dans P_α un $\alpha - \gamma$ -plan perpendiculaire à P_γ . Car l'équation générale des plans générateurs de P_α

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_\alpha v_\alpha = 0$$

contient α paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$ et les conditions de perpendicularité sont au nombre de γ seulement; donc $\alpha - \gamma$ paramètres resteraient indéterminés. En joignant les équations de ce $\alpha - \gamma$ -plan à celles de P_ν , on obtiendrait, contre l'hypothèse, un $\nu + \alpha - \gamma$ -plan contenant à la fois P_k et P_{n-l} .

Donc $\gamma = \alpha$.

Si γ était $> \beta$, on pourrait éliminer $w_1, \dots, w_\beta$ entre les équations (46) de manière à obtenir un plan générateur de P_γ , dont l'équation serait de la forme

$$c_1 v_1 + \dots + c_\alpha v_\alpha = 0.$$

Ce plan serait donc l'un des plans générateurs de P_k , et en joignant son équation à celle de P_ρ on obtiendrait, contre l'hypothèse, un $\rho + 1$ -plan contenant à la fois P_k et P_l .

Si γ était $< \beta$, on pourrait déterminer dans P_β un $\beta - \gamma$ -plan perpendiculaire à P_γ . En joignant les équations de ce $\beta - \gamma$ -plan à celles de P_σ , on aurait, contre l'hypothèse, un $\sigma + \beta - \gamma$ -plan contenant à la fois P_{n-k} et P_{n-l} .

Donc $\gamma = \beta = \alpha$.

Les équations (46) pourront donc s'écrire sous la forme

$$(48) \quad A_r = a_{r1} v_1 + \dots + a_{r\alpha} v_\alpha + b_{r1} w_1 + \dots + b_{r\alpha} w_\alpha = 0 \quad (r=1, 2, \dots, \alpha).$$

35. En second lieu, les α fonctions de la forme

$$(49) \quad B_r = a_{r1} v_1 + \dots + a_{r\alpha} v_\alpha$$

sont toutes distinctes; car, si elles étaient liées par une équation linéaire

$$k_1 B_1 + \dots + k_\alpha B_\alpha = 0,$$

P_γ aurait un plan générateur

$$k_1 A_1 + \dots + k_\alpha A_\alpha = 0$$

dont l'équation se réduirait à la forme (47), résultat dont nous avons démontré l'impossibilité (n° 34).

Les fonctions B_r étant distinctes, on pourra résoudre les équations (49) par rapport à $v_1, \dots, v_\alpha$ et en tirer des relations inverses, de la forme

$$v_r = e_{r1} B_1 + \dots + e_{r\alpha} B_\alpha \quad (r=1, 2, \dots, \alpha).$$

Cela posé, il est clair que les équations des plans

$$(50) \quad C_r = e_{r1}A_1 + \dots + e_{r\alpha}A_\alpha = 0$$

se réduiront à la forme

$$(51) \quad C_r = v_r + b'_{r1}w_1 + \dots + b'_{r\alpha}w_\alpha = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, \alpha),$$

et l'on pourra considérer P_r comme déterminé, non plus par l'intersection des plans

$$A_1 = 0, \dots, A_\alpha = 0,$$

mais par l'intersection des plans

$$C_1 = 0, \dots, C_\alpha = 0$$

dont les équations ont déjà une forme plus simple.

36. Pour obtenir une simplification ultérieure, considérons la fonction

$$\Sigma_r (b'_{r1}w_1 + \dots + b'_{r\alpha}w_\alpha)^2 = \Phi(w_1, \dots, w_\alpha).$$

On peut déterminer une substitution orthogonale, à coefficients réels,

$$(52) \quad \begin{vmatrix} w_1 & f_{11}w_1 + \dots + f_{\alpha 1}w_\alpha \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ w_\alpha & f_{\alpha 1}w_1 + \dots + f_{\alpha \alpha}w_\alpha \end{vmatrix},$$

qui, étant opérée sur cette fonction, en fasse disparaître les rectangles (CAUCHY, *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires, etc.*; *Exercices de mathématiques*, t. IV). Ces coefficients étant ainsi déterminés, remplaçons les plans coordonnés

$$v_1 = 0, \dots, v_\alpha = 0,$$

dont l'intersection détermine P_α , par de nouveaux plans rectangulaires

$$(53) \quad v'_1 = 0, \dots, v'_\alpha = 0$$

déterminés par les relations

$$(54) \quad v'_r = f_{r1}v_1 + \dots + f_{r\alpha}v_\alpha = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, \alpha).$$

D'autre part, employons pour définir P_r , au lieu des équations

$$C_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, \alpha),$$

le système équivalent formé des équations suivantes

$$(55) \quad A'_r = f_{r1}C_1 + \dots + f_{r\alpha}C_\alpha = v'_r + b''_{r1}w_1 + \dots + b''_{r\alpha}w_\alpha = 0,$$

où nous posons, pour abréger,

$$b''_{r\rho} = f_{r1}b'_{1\rho} + \dots + f_{r\alpha}b'_{\alpha\rho} \quad \left(\begin{matrix} r=1,2,\dots,\alpha \\ \rho=1,2,\dots,\alpha \end{matrix} \right).$$

On aura

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} (b'_{1\rho}w_1 + \dots + b'_{\alpha\rho}w_{\alpha})^2 &= \sum_{\rho} [\sum_r b'_{r\rho}(f_{r1}w_1 + \dots + f_{r\alpha}w_{\alpha})]^2 \\ &= \Phi(f_{11}w_1 + \dots + f_{\alpha 1}w_{\alpha}, \dots, f_{1\alpha}w_1 + \dots + f_{\alpha\alpha}w_{\alpha}). \end{aligned}$$

Donc cette expression ne contiendra pas les rectangles des variables, ce qui donnera les équations de condition

$$(56) \quad \sum_{\rho} b''_{r\rho} b''_{s\rho} = 0 \quad (r \geq s),$$

lesquelles expriment que les plans $A'_1, \dots, A'_{\alpha}$ sont rectangulaires entre eux.

37. Soit d'ailleurs

$$(57) \quad \sum_{\rho} b''_{r\rho}{}^2 = g_r^2 \quad (r=1,2,\dots,\alpha).$$

Les relations (56) et (57), étant respectivement divisées par $g_s g_s$ et par g_r^2 , montrent que les quantités

$$\frac{b''_{11}}{g_1}, \dots, \frac{b''_{r\rho}}{g_r}, \dots, \frac{b''_{\alpha\alpha}}{g_{\alpha}}$$

sont les coefficients d'une substitution orthogonale. Prenant pour coordonnées, au lieu de $w_1, \dots, w_{\alpha}$, les suivantes

$$(58) \quad w'_r = \frac{b''_{r1}}{g_r} w_1 + \dots + \frac{b''_{r\alpha}}{g_r} w_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r),$$

P_{α} sera toujours déterminé par les équations (53); mais les équations de P_r se réduiront à la forme simple

$$(59) \quad A'_r = v'_r + g_r w'_r = 0 \quad (r=1,2,\dots,\alpha)$$

où ne figurent plus que α paramètres $g_1, \dots, g_r$.

Posons

$$g_r = \tan \theta_r,$$

et multiplions les équations (59) par $\cos \theta_r$; elles prendront la forme

$$(60) \quad A'_r = v'_r \cos \theta_r + w'_r \sin \theta_r = 0.$$

Nous dirons que $\theta_1, \dots, \theta_{\alpha}$ sont les angles des deux α -plans P_{α} et P_r .

38. Les quantités $\cos^2 \theta_r, \sin^2 \theta_r$, sont des invariants orthogonaux. On peut le démontrer de deux manières.

En premier lieu, soient

$$\lambda_1 v'_1 + \dots + \lambda_{\alpha} v'_{\alpha}$$

l'un quelconque des plans générateurs de P_α ,

$$\mu_1(v'_1 \cos \theta_1 + w'_1 \sin \theta_1) + \dots + \mu_\alpha(v'_\alpha \cos \theta_\alpha + w'_\alpha \sin \theta_\alpha)$$

l'un quelconque des plans générateurs de P_γ . L'angle φ de ces deux plans sera donné par la formule

$$(61) \quad \cos^2 \varphi = \frac{(\lambda_1 \mu_1 \cos \theta_1 + \dots + \lambda_\alpha \mu_\alpha \cos \theta_\alpha)^2}{(\mu_1^2 + \dots + \mu_\alpha^2)(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_\alpha^2)} = \frac{N^2}{ML}.$$

Si l'on fait varier les indéterminées λ et μ , les maxima et minima de cette expression seront évidemment des invariants.

Supposons d'abord que les λ soient seuls variables. Si les λ sont déterminés de manière à donner à $\frac{M}{N}$ sa valeur maximum ou minimum t^2 , on aura

$$t^2 = \frac{N^2}{ML} = \frac{N^2 + d.N^2}{ML + MdL},$$

quelles que soient les variations $d\lambda_1, \dots, d\lambda_\alpha$. On en déduit

$$d.N^2 = t^2 MdL,$$

et, par suite,

$$\frac{dN^2}{d\lambda_1} = t^2 M \frac{dL}{d\lambda_1}, \dots, \frac{dN^2}{d\lambda_\alpha} = t^2 M \frac{dL}{d\lambda_\alpha},$$

ou

$$(62) \quad N\mu_1 \cos \theta_1 = t^2 M \lambda_1, \dots, N\mu_\alpha \cos \theta_\alpha = t^2 M \lambda_\alpha.$$

Tirant de là les valeurs de $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$, substituant dans (61) et réduisant, il vient

$$(63) \quad t^2 = \cos^2 \varphi = \frac{\mu_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dots + \mu_\alpha^2 \cos^2 \theta_\alpha}{\mu_1^2 + \dots + \mu_\alpha^2} = \frac{R}{S}.$$

39. Faisons maintenant varier les quantités $\mu_1, \dots, \mu_\alpha$. La loi de variation de t^2 , qui résulte de la formule (63) peut être représentée géométriquement. En effet, t^2 ne dépendant que des rapports des quantités $\mu_1, \dots, \mu_\alpha$, on peut supposer qu'on les fait varier de telle sorte qu'on ait toujours $S=1$. Cela posé, prenons dans un espace à α dimensions une droite de longueur $r = \frac{1}{t^2}$, et faisant avec les axes coordonnés les angles $\mu_1, \dots, \mu_\alpha$. Le lieu des extrémités de ces droites sera l'ellipsoïde à α dimensions

$$1 = X_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dots + X_\alpha^2 \cos^2 \theta_\alpha.$$

40. Il reste à obtenir les maxima et minima de t^2 . Soit s^2 l'un d'eux : on aura

$$s^2 = \frac{R}{S} = \frac{R + dR}{S + dS} = \frac{dR}{dS},$$

d'où

$$\frac{dR}{d\mu_1} = s^2 \frac{dS}{d\mu_1}, \dots, \frac{dR}{d\mu_\alpha} = s^2 \frac{dS}{d\mu_\alpha},$$

ou

$$(64) \quad \mu_1 \cos^2 \theta_1 = \mu_1 s^2, \dots, \mu_\alpha \cos^2 \theta_\alpha = \mu_\alpha s^2.$$

On satisfera à ces équations en posant

$$s^2 = \cos^2 \theta_p, \mu_1 = \dots = \mu_{p-1} = \mu_{p+1} = \dots = \mu_\alpha = 0,$$

et les équations (62) donneront ensuite les valeurs correspondantes des indéterminées λ :

$$(65) \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_\alpha = 0.,$$

Il existe donc α maxima et minima distincts qui correspondront aux angles respectivement formés par les plans $A_1, \dots, A_\alpha$ avec les plans correspondants $A'_1, \dots, A'_\alpha$.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Étant donnés deux α -plans P_α et P_γ , n'ayant qu'un seul point commun, si l'on cherche ceux de leurs plans générateurs dont l'angle est maximum ou minimum, on obtiendra deux systèmes associés de plans rectangulaires réels $A_1, \dots, A_\alpha$ et $A'_1, \dots, A'_\alpha$: les maxima et minima cherchés ne sont autres que les angles des multiplans P_α et P_γ .

41. Soient, en second lieu, $v'_1, \dots, v'_\alpha, w'_1, \dots, w'_\alpha$ les coordonnées d'un point quelconque de P_γ . Sa distance h au multiplan P_α défini par les équations

$$v'_1 = \dots = v'_\alpha = 0$$

sera évidemment donnée par la formule

$$h^2 = v_1'^2 + \dots + v_\alpha'^2.$$

D'autre part, sa distance k à l'origine des coordonnées sera donnée par la formule

$$k^2 = v_1'^2 + \dots + v_\alpha'^2 + w_1'^2 + \dots + w_\alpha'^2,$$

ou, en tenant compte des équations (60),

$$k^2 = v_1'^2 + \dots + v_\alpha'^2 + v_1'^2 \cot^2 \theta_1 + \dots + v_\alpha'^2 \cot^2 \theta_\alpha = \frac{v_1'^2}{\sin^2 \theta_1} + \dots + \frac{v_\alpha'^2}{\sin^2 \theta_\alpha}.$$

Cela posé, les maxima et minima de $\frac{h^2}{k^2}$ sont évidemment des invariants. Soit u^2 l'un d'entre eux. On aura, comme tout à l'heure,

$$u^2 = \frac{h^2}{k^2} = \frac{h^2 + d \cdot h^2}{h^2 + d \cdot k^2},$$

d'où

$$\frac{d \cdot h^2}{d v_1'} = u^2 \frac{d \cdot k^2}{d v_1'}, \dots, \frac{d \cdot h^2}{d v_\alpha'} = u^2 \frac{d \cdot k^2}{d v_\alpha'},$$

ou

$$v_1' = \frac{u^2 v_1'}{\sin^2 \theta_1}, \dots, v_\alpha' = u^2 \frac{v_\alpha'}{\sin^2 \theta_\alpha}.$$

On satisfera à ces équations en posant

$$u^2 = \sin^2 \theta_p, v_1' = \dots = v_{p-1}' = v_{p+1}' = \dots = v_\alpha' = 0.$$

On aura donc α invariants distincts, qui seront les carrés des sinus des angles $\theta_1, \dots, \theta_\alpha$.

42. On remarquera ici encore que les quantités $\cos \theta_r, \sin \theta_r, \tan \theta_r = g_r$ ne sont pas des invariants, car on peut changer à volonté leur signe en changeant le signe d'une des coordonnées. Leurs carrés seulement sont des invariants.

43. Considérons deux systèmes quelconques de deux α -plans P_α et P_γ , P_α' et P_γ' . S'ils ont les mêmes invariants, ils seront pareils, car nous venons de voir qu'on peut les ramener par une substitution orthogonale à une même forme canonique. Mais il est utile de distinguer le cas où ces deux systèmes sont égaux de celui où ils sont symétriques.

Si $n > 2\alpha$, les deux systèmes seront à la fois égaux et symétriques; car chacun d'eux est symétrique à lui-même, son équation ne changeant pas par la substitution orthogonale de déterminant -1 qu'on obtient en changeant le signe d'une des coordonnées qui ne figurent pas dans ses équations canoniques.

Il n'en est plus de même si $n = 2\alpha$. On aura égalité ou symétrie. Voyons comment ces deux cas pourront être distingués l'un de l'autre.

44. Soient, comme précédemment,

$$v_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, \alpha),$$

et

$$A_r = a_{r1} v_1 + \dots + a_{r\alpha} v_\alpha + b_{r1} w_1 + \dots + b_{r\alpha} w_\alpha = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, \alpha)$$

les équations initiales qui définissent respectivement P_α et P_γ . On pourra de

même met re les équations qui définissent respectivement P_α et P_γ sous la forme

$$V_r = 0 \quad (r=1, 2, \dots, \alpha),$$

et

$$A_{r1}V_1 + \dots + A_{r\alpha}V_\alpha + B_{r1}W_1 + \dots + B_{r\alpha}W_\alpha = 0 \quad (r=1, 2, \dots, \alpha),$$

$V_1=0, \dots, W_\alpha=0$ désignant des plans rectangulaires.

La substitution

$$| v_1, \dots, w_\alpha \quad V_1, \dots, W_\alpha |$$

est orthogonale, et suivant que son déterminant sera égal à ± 1 , il est clair que le système P'_α, P'_γ sera égal ou symétrique au système des deux multiplans P_α, P_γ respectivement définis par les équations

$$v_r = 0 \quad (r=1, 2, \dots, \alpha),$$

et

$$B_r = A_{r1}v_1 + \dots + A_{r\alpha}v_\alpha + B_{r1}w_1 + \dots + B_{r\alpha}w_\alpha \quad (r=1, 2, \dots, \alpha).$$

La question se trouve ainsi ramenée à déterminer dans quel cas ce nouveau système est égal au système P_α, P_γ et dans quel cas, au contraire, il lui est symétrique,

45. Nous allons prouver que l'égalité a lieu si le produit des deux déterminants

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1\alpha} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{\alpha 1} & \dots & A_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} B_{11} & \dots & B_{1\alpha} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{\alpha 1} & \dots & B_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}$$

est de même signe que le produit des deux déterminants

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\alpha} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\alpha 1} & \dots & a_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\alpha} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{\alpha 1} & \dots & b_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}.$$

Dans le cas contraire, on aura la symétrie.

46. Prenons pour définir P_γ , au lieu des plans

$$A_r = 0,$$

les plans

$$C_r = 0$$

définis par les relations (50) ou (51).

Les déterminants analogues à δ_1 et δ_2 par rapport à ce nouveau système de plans seront évidemment égaux à

$$\delta'_1 = \varepsilon \delta_1 = 1, \quad \delta'_2 = \varepsilon \delta_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1} = \begin{vmatrix} b'_{11} & \dots & b'_{1\alpha} \\ \vdots & & \vdots \\ b'_{\alpha 1} & \dots & b'_{\alpha\alpha} \end{vmatrix},$$

designant le déterminant

$$\begin{vmatrix} e_{11} & \dots & e_{1\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{\alpha 1} & \dots & e_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}$$

réciroque de δ_1

On voit par là que δ_2 aura le même signe que $\delta_1\delta_2$.

Prenons maintenant pour coordonnées, au lieu de $v_1, \dots, v_\alpha$, les quantités $v'_1, \dots, v'_\alpha$ déterminées par les relations (54), et définissons P_γ par l'intersection des plans $A_\gamma = 0$ donnés par la formule (55). Le déterminant

$$\delta_2'' = \begin{vmatrix} b_{11}'' & \dots & b_{1\alpha}'' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{\alpha 1}'' & \dots & b_{\alpha\alpha}'' \end{vmatrix}$$

sera évidemment égal à $\delta_2\psi$, ψ étant le déterminant des coefficients $f_{11}, \dots, f_{\alpha\alpha}$. Ce déterminant est égal à ± 1 , la substitution (52) étant orthogonale. On peut le supposer égal à 1; car, pour changer son signe, il suffirait de changer simultanément le signe de $f_{11}, \dots, f_{1\alpha}$, ce qui peut se faire sans altérer la propriété qu'a la substitution (52) de faire disparaître les rectangles dans la fonction Φ . On aura, dans cette hypothèse,

$$\delta_2'' = \delta_2.$$

Cela posé, on a évidemment

$$(66) \quad \delta_2'' = g_1 \dots g_\alpha \psi.$$

ψ' étant le déterminant des équations (58). Ces relations étant orthogonales, on aura

$$\psi' = \pm 1$$

D'ailleurs, le signe des quantités $g_1, \dots, g_\alpha$ est arbitraire; on pourra donc supposer $g_1, \dots, g_\alpha$ positifs, et déterminer le signe de g_1 de telle sorte que ψ' soit égal à 1. On voit alors par l'équation (66) que g_1 aura le même signe que δ_2'' , ou que le produit $\delta_1\delta_2$.

On pourra donc, par des transformations orthogonales de déterminant 1, donner aux équations de P_α et P_γ les formes suivantes

$$(67) \quad v'_1 = 0, \dots, v'_\alpha = 0,$$

$$(68) \quad v'_1 + g_1 w'_1 = 0, \dots, v'_\alpha + g_\alpha w'_\alpha = 0.$$

47. Opérant de la même manière sur le système P_α, P_γ , qui a par hypothèse les mêmes invariants $g_1^2, \dots, g_\alpha^2$, on pourra, par des transformations orthogonales de déterminant 1, mettre ses équations sous une forme canonique identique à la précédente, si $\Delta_1\Delta_2$ a le même signe que $\delta_1\delta_2$; sous

une forme qui diffère de la précédente par le signe de g_1 , si $\Delta_1 \Delta_2$ est de signe contraire à $\delta_1 \delta_2$. Il est clair que, dans le premier cas, les deux systèmes P_α , P_γ et P'_α , P'_γ seront égaux; dans le second cas, ils seront symétriques, puisque pour ramener leurs formes canoniques à l'identité, il faudra changer le signe d'une coordonnée.

Notre proposition est donc établie.

48. Nous avons vu, dans ce qui précède, qu'on peut déterminer un système de coordonnées $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_\sigma, z_1, \dots, z_\tau, u_1, \dots, u_\nu, v'_1, \dots, v'_\alpha, w'_1, \dots, w'_\alpha$, tel que P_k et P_l soient respectivement déterminés par les équations

$$(69) \quad \begin{cases} x_1 = 0, \dots, x_p = 0, \\ u_1 = 0, \dots, u_\nu = 0, \\ v'_1 = 0, \dots, v'_\alpha = 0, \end{cases}$$

et par les équations

$$(70) \quad \begin{cases} x_1 = 0, \dots, x_p = 0, \\ z_1 = 0, \dots, z_\tau = 0, \\ v'_1 \cos \theta_1 + w'_1 \sin \theta_1 = 0, \dots, v'_\alpha \cos \theta_\alpha + w'_\alpha \sin \theta_\alpha = 0. \end{cases}$$

Les multiplans P_{n-k} et P_{n-l} menés par l'origine perpendiculairement aux précédents auront évidemment pour équations

$$(71) \quad \begin{cases} y_1 = 0, \dots, y_\sigma = 0, \\ z_1 = 0, \dots, z_\tau = 0, \\ w'_1 = 0, \dots, w'_\alpha = 0, \end{cases}$$

et

$$(72) \quad \begin{cases} y_1 = 0, \dots, y_\sigma = 0, \\ u_1 = 0, \dots, u_\nu = 0, \\ -v'_1 \sin \theta_1 + w'_1 \cos \theta_1 = 0, \dots, -v'_\alpha \sin \theta_\alpha + w'_\alpha \cos \theta_\alpha = 0. \end{cases}$$

La comparaison de ces équations montre :

1° Que P_{n-l} forme avec P_k des angles en nombre α , respectivement égaux à $\frac{\pi}{2} + \theta_1, \dots, \frac{\pi}{2} + \theta_\alpha$;

2° Que P_{n-k} et P_{n-l} forment entre eux des angles en nombre α , respectivement égaux à $\pi + \theta_1, \dots, \pi + \theta_\alpha$.

Il résulte de là que P_{n-k} et P_{n-l} auront les mêmes invariants que P_k et P_l .

49. Un système formé d'un k -plan P_k et d'un l -plan P_l aura en général α invariants angulaires, α étant le plus petit des quatre nombres $k, l, n-k, n-l$.

Admettons en effet que les coefficients de P_k et de P_l ne soient liés par aucune relation particulière, et supposons d'abord que k soit le plus petit

L'angle φ des deux plans sera donné par l'expression

$$(75) \quad \cos^2 \varphi = \frac{\left(\sum A_p B_p \right)^2}{\sum A_p^2 \sum B_p^2} = \frac{M}{N},$$

dont il reste à déterminer le minimum.

Soit s^2 un des minima cherchés. Les valeurs correspondantes des indéterminées $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$ d'une part, et $\mu_1, \dots, \mu_\alpha$ d'autre part, ne sont déterminées que par leur rapport, $\frac{M}{N}$ étant homogène et du degré zéro par rapport à chacun de ces systèmes de variables. On pourra donc déterminer les λ et les μ de telle sorte qu'on ait, outre la condition

$$\frac{M}{N} = s^2,$$

les deux conditions auxiliaires suivantes

$$\sum A^2 = 1, \quad \sum B^2 = 1,$$

et par suite

$$N = \sum A^2 \sum B^2 = 1, \quad s = \sqrt{\frac{M}{N}} = \sqrt{M} = \sum A_p B_p.$$

Cela posé, donnons aux variables λ, μ des accroissements infiniment petits quelconques. On aura, d'après la condition du minimum,

$$s^2 = \frac{M}{N} = \frac{M + dM}{N + dN}.$$

Chassant les dénominateurs et égalant séparément à zéro les coefficients de $d\lambda_1, \dots, d\lambda_\alpha, d\mu_1, \dots, d\mu_\alpha$, il viendra

$$(76) \quad \frac{dM}{d\lambda_\sigma} = s^2 \frac{dN}{d\lambda_\sigma}, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, \alpha).$$

$$(77) \quad \frac{dM}{d\mu_\sigma} = s^2 \frac{dN}{d\mu_\sigma},$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \frac{dM}{d\lambda_\sigma} &= 2 \sum A_p B_p \sum a_{\sigma p} B_p = 2s \sum a_{\sigma p} B_p, \\ \frac{dN}{d\lambda_\sigma} &= 2 \sum B^2 \sum a_{\sigma p} A_p = 2 \sum a_{\sigma p} A_p. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (76), et supprimant le facteur commun s , il viendra

$$(78) \quad \sum a_{\sigma p} B_p = s \sum a_{\sigma p} A_p \quad (\sigma = 1, 2, \dots, \alpha).$$

L'équation (77) donnera de même

$$(79) \quad \sum b_{\sigma p} A_p = s \sum b_{\sigma p} B_p \quad (\sigma = 1, 2, \dots, \alpha).$$

Les équations (73), (74), (78) et (79) forment un système de $2n + 2\alpha$ équations linéaires entre les $2n + 2\alpha$ quantités λ, μ, A, B . En égalant à zéro le déterminant de ce système, on aura l'équation caractéristique qui détermine s . Cette équation est du degré 2α . Mais il est aisé de voir qu'elle ne contiendra que des puissances paires de s .

V. PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX MULTIPLANS.

51. Passons maintenant à la considération de deux multiplans P_k, P_l qui n'aient aucun point commun. Par un point quelconque de P_k menons un l -plan P_i parallèle à P_l . On pourra choisir les coordonnées de manière à ramener P_k et P_i aux formes canoniques (69) et (70). P_i , rapporté aux mêmes axes, aura pour équations

$$(80) \quad x_1 = a_1, \dots, x_p = a_p,$$

$$(81) \quad z_1 = b_1, \dots, z_r = b_r,$$

$$(82) \quad v'_1 \cos \theta_1 + w'_1 \sin \theta_1 = c_1, \dots, v'_\alpha \cos \theta_\alpha + w'_\alpha \sin \theta_\alpha = c_\alpha.$$

Mais, si l'on prend pour coordonnées, au lieu de

$$z_1, \dots, z_r, w'_1, \dots, w'_\alpha,$$

les quantités

$$z_1 - b_1, \dots, z_r - b_r, w'_1 - \frac{c_1}{\sin \theta_1}, \dots, w'_\alpha - \frac{c_\alpha}{\sin \theta_\alpha},$$

on fera disparaître les constantes b et c . D'autre part, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des paramètres quelconques assujettis à la relation

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p = 0;$$

l'équation générale

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$$

représente un $p-1$ -plan, résultant de la combinaison de $p-1$ plans générateurs rectangulaires

$$x'_2 = 0, \dots, x'_p = 0,$$

D'ailleurs P_q résulte de l'intersection de P_{q-1} et d'un plan x'_i perpendiculaire à P_{q-1} . Prenons pour plans coordonnés

$$x'_1 = 0, \dots, x'_q = 0,$$

au lieu de

$$x_1 = 0, \dots, x_q = 0.$$

La forme des équations de P_k ne sera pas changée; mais les équations (80) deviendront

$$x'_1 = \alpha'_1, x'_2 = 0, \dots, x'_q = 0.$$

Les équations de P'_i ne contiendront donc plus qu'un seul terme constant α'_i . Il est aisé de voir que cette dernière constante représente la *plus courte distance* de P_k et de P'_i ; c'est donc un invariant nouveau à ajouter aux invariants angulaires précédemment étudiés.

52. Cherchons maintenant comment on pourra calculer *a priori* cette plus courte distance.

Soient $A_1 = 0, \dots, A_k = 0$ les équations de P_k ; $B_1 = 0, \dots, B_l = 0$ celles de P'_l . On pourra exprimer les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ d'un point quelconque de P_k en fonction linéaire de $n - k$ variables indépendantes $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$.

En effet, soient $A_{k+1}, \dots, A_n$ des fonctions linéaires quelconques de $x_1, \dots, x_n$, choisies de manière à former avec $A_1, \dots, A_k$ un système de n fonctions distinctes, et posons

$$A_{k+1} = \lambda_1, \dots, A_n = \lambda_{n-k}.$$

Ces équations, jointes aux suivantes

$$A_1 = 0, \dots, A_k = 0,$$

fourniront un système de n équations linéaires. En les résolvant par rapport à $x_1, \dots, x_n$, on obtiendra pour ces variables des expressions de la forme

$$x_q = c_{q1}\lambda_1 + \dots + c_{q,n-k}\lambda_{n-k} + d_q.$$

On pourra, de la même manière, exprimer les coordonnées $X_1, \dots, X_n$ d'un point quelconque de P'_l en fonction linéaire de $n - l$ variables indépendantes, $\lambda_{n-k+1}, \dots, \lambda_{2n-k-l}$, par des expressions de la forme suivante

$$-X_q = c_{q,n-k+1}\lambda_{n-k+1} + \dots + c_{q,2n-k-l}\lambda_{2n-k-l} + D_q.$$

Cela posé, le carré de la plus courte distance cherchée Δ s'obtiendra en cherchant le minimum de l'expression

$$(x_1 - X_1)^2 + \dots + (x_n - X_n)^2,$$

ou, en substituant pour les x et les X leurs valeurs et posant pour abrégé $2n - k - l = m$, $d_p + D_p = \delta_p$, le minimum de l'expression

$$(83) \quad \sum_{p=1}^{p=n} (c_{p1}\lambda_1 + \dots + c_{pm}\lambda_m + \delta_p)^2,$$

où toutes les variables $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont indépendantes.

Ce minimum sera évidemment nul, si $m \geq n$.

53. Soit au contraire $m < n$. Posons, pour abrégé,

$$(84) \quad c_{p1}\lambda_1 + \dots + c_{pm}\lambda_m + \delta_p = -\mu_p.$$

On obtiendra le minimum cherché en égalant à zéro les dérivées de l'expression (83) par rapport aux variables $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, ce qui donnera une série d'équations de la forme

$$(85) \quad c_{1p}\mu_1 + c_{2p}\mu_2 + \dots + c_{np}\mu_n = 0.$$

Les équations (84) et (85) sont au nombre de $m+n$, et linéaires par rapport aux $m+n$ variables λ et μ . On pourra donc calculer ces variables sans difficulté; on obtiendra des expressions de la forme

$$\lambda_1 = -\frac{P_1}{R}, \dots, \lambda_n = -\frac{P_n}{R}, \mu_1 = -\frac{Q_1}{R}, \dots, \mu_n = -\frac{Q_n}{R},$$

en posant pour abrégé

$$R = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{1m} & c_{2m} & \dots & c_{nm} \end{vmatrix},$$

$$P_1 = \begin{vmatrix} \delta_1 & c_{12} & \dots & c_{1m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_2 & c_{22} & \dots & c_{2m} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_n & c_{n2} & \dots & c_{nm} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{1m} & c_{2m} & \dots & c_{nm} \end{vmatrix}, \text{ etc.,}$$

$$Q_1 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} & \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} & \delta_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} & \delta_n & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{2m} & \dots & c_{nm} \end{vmatrix}, \text{ etc.,}$$

et le minimum cherché sera donné par la formule

$$A^2 = \frac{Q_1^2 + \dots + Q_n^2}{R^2}.$$

Cette expression peut être simplifiée. Nous allons montrer, en effet, que son numérateur est divisible par R .

54. Et d'abord il résulte évidemment de la forme du déterminant R que l'on aura

$$R = \sum A_{\alpha\beta\dots},$$

en désignant par $A_{\alpha\beta\dots}$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} c_{\alpha 1} & \dots & c_{\alpha m} \\ c_{\beta 1} & \dots & c_{\beta m} \\ \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix}$$

et la sommation s'étendant à tous les systèmes de valeurs distinctes des m indices $\alpha, \beta, \dots$ compris entre 1 et n .

On aura de même

$$P_i = \sum A_{\alpha\beta\dots} D_{\alpha\beta\dots}^i,$$

$D_{\alpha\beta\dots}^i$ étant ce que devient $A_{\alpha\beta\dots}$ lorsqu'on y remplace $c_{\alpha\beta}, c_{\beta\beta}, \dots$ par $\delta_\alpha, \delta_\beta, \dots$

On aura enfin, d'une manière analogue,

$$Q_i = (-1)^{i+1} \sum B_{i\alpha\beta\dots} A_{\alpha\beta\dots},$$

où $B_{i\alpha\beta\dots}$ représente le déterminant

$$\begin{vmatrix} c_{i1} & \dots & c_{im} & \delta_i \\ c_{\alpha 1} & \dots & c_{\alpha m} & \delta_\alpha \\ c_{\beta 1} & \dots & c_{\beta m} & \delta_\beta \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \end{vmatrix},$$

et où la sommation $\sum^{\rho}$ s'étend aux systèmes de valeurs distincts des indices $\alpha, \beta, \dots$ à l'exclusion de la valeur ρ .

55. Substituons dans Δ^2 les valeurs de $R, Q_1, \dots, Q_n$, il viendra, en appelant M^2 le minimum cherché,

$$M^2 = \frac{S \left(\sum^{\rho} B_{\rho\alpha\beta\dots} A_{\alpha\beta\dots} \right)^2}{\left(\sum A_{\alpha\beta\dots}^2 \right)^2},$$

la nouvelle sommation représentée par S s'étendant à toutes les valeurs de ρ .

On voit déjà que le numérateur de M^2 est une fonction du second degré des déterminants $A_{\alpha\beta\dots}$. Nous allons montrer qu'on peut le mettre sous la forme suivante

$$\left(S B_{\rho\alpha\beta\dots}^2 \right) \left(\sum A_{\alpha\beta\dots}^2 \right),$$

la nouvelle sommation S s'étendant à tous les différents systèmes de valeurs de $\rho, \alpha, \beta, \dots$.

56. Nous commencerons par l'examen de quelques cas particuliers.

Soit d'abord $n - m = 1$. L'indice ρ étant déterminé, les indices en nombre $m, \alpha, \beta, \dots$, n'auront plus qu'un seul système de valeurs, la valeur ρ étant écartée. La somme représentée par $\sum^{\rho}$ se réduira donc à un seul terme, et l'on aura, pour le numérateur de Δ^2 ,

$$S B_{\rho\alpha\beta\dots}^2 A_{\alpha\beta\dots}^2.$$

D'ailleurs les indices $\rho, \alpha, \beta, \dots$, en nombre $m + 1$, ne sont susceptibles que d'un seul système de valeurs, et en les permutant on changera tout au plus le signe du déterminant $B_{\rho\alpha\beta\dots}$. Le facteur $B_{\rho\alpha\beta\dots}^2$ sera donc le même dans tous les termes de la somme S ; et il s'y trouvera multiplié par les divers termes de la somme $\sum A_{\alpha\beta\dots}^2$. Le numérateur de Δ^2 sera donc égal à $B_{\rho\alpha\beta\dots}^2 \sum A_{\alpha\beta\dots}^2$; ce qu'il fallait démontrer.

57. Soit en second lieu $m = 1, n$ quelconque. On aura

$$\Delta^2 = (c_{11}\lambda_1 + \delta_1)^2 + \dots + (c_{n1}\lambda_1 + \delta_n)^2,$$

et la valeur de λ_1 qui donne le minimum sera fournie par l'équation

$$c_{11}(c_{11}\lambda_1 + \delta_1) + \dots + c_{n1}(c_{n1}\lambda_1 + \delta_n) = 0.$$

On en déduit

$$\lambda_1 = - \frac{\sum_1^n c_{\alpha 1} \delta_\alpha}{\sum_1^n c_{\alpha 1}^2}.$$

Substituant cette valeur dans l'expression

$$\Delta^2 = \sum \left(c_{\alpha 1} \lambda_1 + \delta_\alpha \right)^2 = \lambda_1^2 \sum c_{\alpha 1}^2 + 2\lambda_1 \sum c_{\alpha 1} \delta_\alpha + \sum \delta_\alpha^2,$$

on aura l'expression du minimum

$$(86) \quad \sum c_{\alpha 1}^2 \frac{\left(\sum c_{\alpha 1} \delta_\alpha \right)^2 - 2 \left(\sum c_{\alpha 1} \delta_\alpha \right)^2 + \sum \delta_\alpha^2 \sum c_{\alpha 1}^2}{\left(\sum c_{\alpha 1}^2 \right)^2} \\ = \sum c_{\alpha 1}^2 \frac{S \left(\delta_\rho c_{\alpha 1} - \delta_\alpha c_{\rho 1} \right)^2}{\left(\sum c_{\alpha 1}^2 \right)^2},$$

la sommation S s'étendant à tous les différents systèmes de valeurs des indices ρ, α . Mais les deux sommes $\sum c_{\alpha 1}^2$ et $\sum (\delta_\rho c_{\alpha 1} - \delta_\alpha c_{\rho 1})^2$ sont précisément ce que deviennent dans le cas particulier que l'on considère les expressions $\sum A_{\alpha\beta}^2$ et $\sum B_{\rho\alpha\beta}^2$. Le théorème se trouve donc démontré.

58. Cela posé, pour établir d'une manière générale que quels que soient m et n (m étant $< n$), on a la relation

$$(87) \quad M^2 = \frac{\sum B_{\rho\alpha\beta}^2}{\sum A_{\alpha\beta}^2},$$

il nous suffira de démontrer que si cette relation est vraie pour m et n , ainsi que pour $m+1$ et n (en supposant $m+1 < n$), elle sera encore vraie pour $m+1, n+1$. En effet, la proposition est déjà prouvée, quel que soit n , pour $m=1$ et pour $m=n-1$.

Or, soit

$$(88) \quad \Delta^2 = \sum_{\rho=1}^{\rho=n+1} \left(c_{\rho 1} \lambda_1 + \dots + c_{\rho m} \lambda_m + c_{\rho, m+1} \lambda_{m+1} + \delta_\rho \right)^2.$$

Posons

$$(89) \quad \lambda_\rho = a_{\rho 1} \Lambda_1 + \dots + a_{\rho, m+1} \Lambda_{m+1},$$

$\Lambda_1, \dots, \Lambda_{m+1}$ étant de nouvelles variables, et $a_{\rho 1}, \dots, a_{\rho, m+1}$ des coefficients quelconques. La quantité Δ^2 sera une fonction quadratique des nouvelles

variables Δ ; mais il est clair que son minimum M^2 ne sera pas altéré par cette transformation. Il en est de même de l'expression

$$\frac{S_{B_{\alpha\beta}^2 \dots}}{\sum A_{\alpha\beta}^2 \dots},$$

car chacun des déterminants partiels qui figurent tant au numérateur qu'au dénominateur se trouvera multiplié après la transformation par un même facteur, égal au déterminant de la substitution (89).

Or on pourra évidemment choisir les nouvelles variables de telle sorte que

$$c_{n+1,1}\lambda_1 + \dots + c_{n+1,m+1}\lambda_{m+1}$$

se réduise au produit de Δ_{m+1} par un facteur constant. On voit par là que, pour démontrer l'égalité (87) dans le cas général, il suffira de considérer le cas particulier où l'on a $c_{n+1,1} = \dots = c_{n+1,m} = 0$. Mais, dans ce cas particulier, la démonstration devient facile, comme on va le voir.

59. Supposons, pour simplifier l'écriture, qu'on ait $m=1$, $n=3$ (on verra aisément que le procédé de démonstration est général). L'expression dont on aura à chercher le minimum sera

$$\Delta^2 = (c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2 + \delta_1)^2 + (c_{21}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 + \delta_2)^2 + (c_{31}\lambda_1 + c_{32}\lambda_2 + \delta_3)^2 + (c_{42}\lambda_2 + \delta_4)^2.$$

Pour l'obtenir, on pourra évidemment opérer de la manière suivante : on supposera λ_2 constant et λ_1 seul variable, on obtiendra ainsi un certain minimum M^2 , qui sera fonction de λ_2 ; puis on fera varier λ_2 de manière à obtenir un minimum minimorum, qui sera la quantité cherchée M^2 .

Or le théorème étant établi pour $m=1$, $n=3$, on aura immédiatement le minimum de la somme des trois premiers carrés, en supposant λ_2 constant. Ce minimum sera égal à

$$\frac{\left| \begin{array}{cc} c_{11} & c_{12}\lambda_2 + \delta_1 \\ c_{21} & c_{22}\lambda_2 + \delta_2 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} c_{31} & c_{32}\lambda_2 + \delta_3 \\ c_{41} & c_{42}\lambda_2 + \delta_4 \end{array} \right|^2}{c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2}.$$

En y ajoutant le terme constant $(c_{42}\lambda_2 + \delta_4)^2$, on aura pour M^2 l'expression suivante

$$M^2 = \frac{(\mathcal{A}_{12}\lambda_2 + \mathcal{C}_{12})^2 + (\mathcal{A}_{22}\lambda_2 + \mathcal{C}_{22})^2 + (\mathcal{A}_{32}\lambda_2 + \mathcal{C}_{32})^2 + (c_{42}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2)(c_{42}\lambda_2 + \delta_4)^2}{c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2}.$$

en posant pour abrégé

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} = \left| \begin{array}{cc} c_{\alpha 1} & c_{\alpha 2} \\ c_{\beta 1} & c_{\beta 2} \end{array} \right|, \mathcal{C}_{\alpha\beta} = \left| \begin{array}{cc} c_{\alpha 1} & \delta_{\alpha} \\ c_{\beta 1} & \delta_{\beta} \end{array} \right|.$$

Cela posé, M^2 ne contenant plus qu'une seule variable λ_2 , son minimum M^2 sera égal à

$$(90) \quad \frac{U + V(c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2)}{W(c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2)},$$

en posant pour abrégé

$$U = (\mathcal{A}_{12}C_{25} - \mathcal{A}_{25}C_{12})^2 + (\mathcal{A}_{12}C_{31} - \mathcal{A}_{31}C_{12})^2 + (\mathcal{A}_{25}C_{31} - \mathcal{A}_{31}C_{25})^2,$$

$$V = (\mathcal{A}_{12}\delta_4 - C_{12}c_{42})^2 + (\mathcal{A}_{25}\delta_4 - C_{25}c_{42})^2 + (\mathcal{A}_{31}\delta_4 - C_{31}c_{42})^2,$$

et

$$W = (\mathcal{A}_{12}^2 + \mathcal{A}_{25}^2 + \mathcal{A}_{31}^2 + c_{42}^2)(c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2).$$

Or les six termes de W sont précisément les carrés des déterminants binaires $A_{\alpha\beta}$ formés avec les quantités

$$\begin{array}{cccc} c_{11} & c_{21} & c_{31} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & c_{42} \end{array}.$$

En second lieu, les termes de V sont précisément les carrés de ceux des déterminants ternaires

$$B_{\rho\alpha\delta} = \begin{vmatrix} c_{\rho 1} & c_{\rho 2} & \delta_{\rho} \\ c_{\alpha 1} & c_{\alpha 2} & \delta_{\alpha} \\ c_{\delta 1} & c_{\delta 2} & \delta_{\delta} \end{vmatrix},$$

pour lesquels $\rho = 4$.

Enfin, si l'on avait $c_4 = \delta_4 = 0$, M^2 se réduirait à

$$\frac{U}{(\mathcal{A}_{12}^2 + \mathcal{A}_{25}^2 + \mathcal{A}_{31}^2)(c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2)}.$$

Mais, dans ce cas, la fonction Δ contenant dans son expression un carré de moins que précédemment, le théorème lui serait applicable, par hypothèse.

L'expression de son minimum serait donc $\frac{B_{125}^2}{\mathcal{A}_{12}^2 + \mathcal{A}_{25}^2 + \mathcal{A}_{31}^2}$. On aura par

suite

$$U = (c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2) B_{125}^2,$$

et, substituant cette valeur dans l'expression (90), il viendra

$$M^2 = \frac{\sum S_{\rho\alpha\delta}^2}{\sum A_{\alpha\delta}^2},$$

le signe S s'étendant à tous les systèmes de valeurs de ρ, α, δ . C'est précisément l'égalité qu'il s'agissait de démontrer.

60. De la formule que nous venons d'établir pour exprimer le minimum d'une somme de carrés de fonctions linéaires, on peut déduire de nombreuses relations entre les déterminants formés avec les coefficients de ces fonctions. Pour les obtenir, il suffit d'observer que le minimum cherché peut s'obtenir en laissant d'abord constantes une partie des variables, et les faisant varier ensuite de manière à obtenir le minimum minimorum.

VI. FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES.

61. Considérons un système quelconque de n plans $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ se coupant en un point quelconque, et prenons-les pour plans coordonnés. La distance de deux points, ayant pour coordonnées $x_1, \dots, x_n$ et $x'_1, \dots, x'_n$ sera donnée, comme on l'a vu, par une formule quadratique

$$(91) \quad (x_1 - x'_1)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2 + 2a_{12}(x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2) + \dots = 0.$$

Posant $a_{12} = a_{21}$ et introduisant pour la symétrie de nouveaux coefficients $a_{11}, \dots, a_{nn}$ égaux à l'unité, on pourra mettre l'expression (91) sous la forme

$$f(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n) = \sum a_{rs} (x_r - x'_r)(x_s - x'_s) = 0.$$

D'ailleurs cette expression ne peut s'annuler sans qu'on ait identiquement $x_1 - x'_1 = \dots = x_n - x'_n = 0$. Donc la forme f est définie et positive. Il faudra, pour que cela ait lieu, que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et ses mineurs de tous les ordres pris par rapport aux coefficients diagonaux,

$$\frac{dD}{da_{rr}}, \frac{d^2D}{da_{rr}da_{ss}}, \dots$$

soient positifs.

Ces conditions sont la généralisation de ces propositions de géométrie :

Dans tout trièdre, une face quelconque est moindre que la somme des autres; et la somme des faces est moindre que quatre droits.

Nous allons maintenant montrer que les angles mutuels de tous les multiplans formés avec les plans $x_1, \dots, x_n$ s'expriment au moyen du déterminant D et de ses mineurs.

Nous supposerons, pour abrégier l'écriture, que l'on a $n = 4$.

62. 1° Angle des deux droites $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ et $x_3 = x_4 = x_1 = 0$.

Soient $x_1, 0, 0, 0$ les coordonnées d'un point p de la première droite,

0, ξ_2 , 0, 0 celles de sa projection q , sur la seconde, ξ_2 sera déterminé par la condition que

$$\Delta^2 = x_1^2 + \xi_2^2 - 2a_{12}x_1\xi_2,$$

carré de la distance des deux points p et q , soit minimum. On aura donc

$$\xi_2 = a_{12}x_1.$$

Cette valeur réduira l'expression de Δ^2 à $(1 - a_{12}^2)x_1^2$.

Cela posé, désignons par [234.341] l'angle des deux droites. Nous avons vu (50) que l'on aura

$$\sin^2 [234.341] = \frac{\Delta^2}{x_1^2} = 1 - a_{12}^2,$$

et par suite

$$\cos [234.341] = \pm a_{12}.$$

Le choix du signe à donner à ce cosinus est tout à fait arbitraire; mais il peut être fixé par une convention. Nous le considérerons comme positif ou négatif, suivant qu'un point situé sur la partie positive de l'axe des x_1 se projette sur la partie positive ou sur la partie négative de l'axe des x_2 . D'après cette convention, on aura

$$(92) \quad \cos [234.341] = a_{12}.$$

63. 2° *Angle de la droite* $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ avec le biplan $x_1 = x_4 = 0$.

Désignons cet angle par le symbole [234.41]. Soit $(x_1, 0, 0, 0)$ un point de la droite, $(0, \xi_2, \xi_3, 0)$ sa projection sur le biplan; ξ_2, ξ_3 devront rendre minimum la distance

$$\Delta_1^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + 2a_{23}\xi_2\xi_3 - 2a_{12}x_1\xi_2 - 2a_{13}x_1\xi_3,$$

d'où les équations de condition

$$\begin{aligned} a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 - a_{12}x_1 &= 0, \\ a_{23}\xi_2 + a_{33}\xi_3 - a_{13}x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations donneront, en remarquant que $a_{23} = a_{32}$, les valeurs suivantes de ξ_2, ξ_3 ,

$$\xi_2 = -\frac{\frac{d^2D}{da_{13}da_{44}}}{\frac{d^2D}{da_{11}da_{44}}}x_1, \quad \xi_3 = -\frac{\frac{d^2D}{da_{12}da_{44}}}{\frac{d^2D}{da_{11}da_{44}}}x_1.$$

D'ailleurs en les multipliant respectivement par ξ_2 , ξ_3 et les retranchant ensuite de Δ_1^2 , il viendra

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 &= a_{11}x_1^2 - (a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3)x_1 \\ &= \frac{a_{11} \frac{d^2D}{da_{11}da_{44}} + a_{12} \frac{d^2D}{da_{12}da_{44}} + a_{13} \frac{d^2D}{da_{13}da_{44}}}{\frac{d^2D}{da_{11}da_{44}}} x_1^2 = \frac{\frac{dD}{da_{44}}}{\frac{d^2D}{da_{11}da_{44}}} x_1^2, \end{aligned}$$

d'où

$$(93) \quad \sin^2 [234.41] = \frac{\Delta_1^2}{x_1^2} = \frac{\frac{dD}{da_{44}}}{\frac{d^2D}{da_{11}da_{44}}}.$$

64. 3° *Angle de la droite* $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ avec le plan $x_1 = 0$. Nous désignerons cet angle par [234.1].

Le point $(x_1, 0, 0, 0)$ aura pour projection sur ce plan un point $(0, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, où ξ_2, ξ_3, ξ_4 sont choisis de manière à rendre minimum l'expression

$$\Delta_2^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + a_{44}\xi_4^2 - 2a_{12}x_1\xi_2 - \dots + 2a_{23}\xi_2\xi_3 + \dots$$

Ils satisferont donc aux relations

$$(94) \quad \begin{cases} a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 + a_{24}\xi_4 - a_{12}\xi_1 = 0, \\ a_{33}\xi_2 + a_{33}\xi_3 + a_{34}\xi_4 - a_{13}\xi_1 = 0, \\ a_{24}\xi_2 + a_{34}\xi_3 + a_{44}\xi_4 - a_{14}\xi_1 = 0. \end{cases}$$

Ces équations donneront

$$(95) \quad \xi_2 = -\frac{\frac{dD}{da_{12}}}{\frac{dD}{da_{11}}}, \quad \xi_3 = -\frac{\frac{dD}{da_{13}}}{\frac{dD}{da_{11}}}, \quad \xi_4 = -\frac{\frac{dD}{da_{14}}}{\frac{dD}{da_{11}}}.$$

D'ailleurs en multipliant les équations (85) respectivement par ξ_2, ξ_3, ξ_4 et les retranchant de Δ_2^2 , il viendra

$$\begin{aligned} \Delta_2^2 &= a_{11}x_1^2 - a_{12}x_1\xi_2 - a_{13}x_1\xi_3 - a_{14}x_1\xi_4 \\ &= \frac{a_{11} \frac{dD}{da_{11}} + a_{12} \frac{dD}{da_{12}} + a_{13} \frac{dD}{da_{13}} + a_{14} \frac{dD}{da_{14}}}{\frac{dD}{da_{11}}} x_1^2 = \frac{D}{\frac{dD}{da_{11}}} x_1^2, \end{aligned}$$

et par suite

$$(96) \quad \sin^2 [234.1] = \frac{\Delta_2^2}{x_1^2} = \frac{D}{\frac{dD}{da_{11}}}.$$

65. 4° *Angle du plan* $x_1 = 0$ avec le plan $x_4 = 0$.

Soit [1.4] cet angle. On aura

$$\sin^2 [1.4] = \frac{\Delta_3^2}{\Delta_1^2},$$

Δ_1 étant la distance d'un point quelconque p du plan $x_4 = 0$ à l'intersection des deux plans $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ et Δ_2 sa distance au plan $x_1 = 0$.

Or prenons pour p le point dont les coordonnées sont $x_1, 0, 0, 0$. Nous avons trouvé

$$\Delta_1^2 = \frac{\frac{dD}{da_{44}}}{\frac{dD}{da_{11} da_{44}}} x_1^2, \quad \Delta_2^2 = \frac{D}{\frac{dD}{da_{11}}},$$

donc

$$\sin^2 [1.4] = \frac{D \frac{d^2 D}{da_{11} da_{44}}}{\frac{dD}{da_{11}} \frac{dD}{da_{44}}}.$$

On en déduit

$$\cos^2 [1.4] = \frac{\frac{dD}{da_{11}} \frac{dD}{da_{44}} - D \frac{d^2 D}{da_{11} da_{44}}}{\frac{dD}{da_{11}} \frac{dD}{da_{44}}}.$$

Or le numérateur de cette expression est égal (SALMON, *Lessons on higher Algebra*, 2^e édition, n° 32) à

$$\frac{dD}{da_{14}} \frac{dD}{da_{41}} = \left(\frac{dD}{da_{14}} \right)^2;$$

on aura donc

$$(97) \quad \cos [1.4] = \pm \frac{\frac{dD}{da_{14}}}{\sqrt{\frac{dD}{da_{11}} \frac{dD}{da_{44}}}}.$$

66. Le choix du signe est encore arbitraire dans cette formule. Pour le fixer par une convention convenable, nous remarquerons que le plan $x_4 = 0$ est coupé par le plan $x_1 = 0$ en deux parties distinctes; l'une *positive*, pour laquelle $x_4 > 0$, l'autre *négative*, pour laquelle $x_4 < 0$. De même, le plan $x_4 = 0$ coupera le plan $x_1 = 0$ en deux parties, l'une *positive*, pour laquelle $x_1 > 0$, l'autre *négative*, pour laquelle $x_1 < 0$. Cela posé, nous convenons de considérer $\cos [1.4]$ comme positif, si la partie positive du plan $x_4 = 0$ se projette sur la partie positive du plan $x_1 = 0$; comme négatif dans le cas contraire.

Or nous avons vu que la projection $(0, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ du point $(x_1, 0, 0, 0)$ sur le plan $x_1 = 0$ est donnée par les formules (94). D'ailleurs $\frac{dD}{da_{11}}$ est essentiellement positif. Donc $\cos [1.4]$ qui a le même signe que $\frac{x_1}{\xi_1}$ sera de signe

contraire à $\frac{dD}{da_{14}}$. Il faudra donc prendre le signe — dans la formule (97).

67. Si au lieu de quatre variables on n'en avait plus que trois, la formule que nous venons d'écrire deviendrait la formule fondamentale des triangles sphériques, ainsi qu'il est aisé de le vérifier.

68. On peut d'ailleurs obtenir pour $\cos [1.4]$ de nouvelles expressions exemptes (en apparence) de radical; on a en effet, d'après la formule (93),

$$\frac{dD}{da_{44}} = \sin^2 [234.41] \frac{d^2D}{da_{11}da_{44}}.$$

De même

$$\frac{dD}{da_{11}} = \sin^2 [231.14] \frac{d^2D}{da_{11}da_{44}}.$$

Substituant ces valeurs dans (97), il viendra

$$\cos [1.4] = \frac{-\frac{dD}{da_{14}}}{\sin [234.41] \sin [231.14] \frac{d^2D}{da_{11}da_{44}}},$$

formule où les deux sinus devront être pris avec le signe +.

On a d'autre part

$$\frac{dD}{da_{11}} = \frac{D}{\sin^2 [234.1]}, \quad \frac{dD}{da_{44}} = \frac{D}{\sin^2 [123.4]},$$

d'où

$$\cos [1.4] = \frac{-\frac{dD}{da_{14}} \sin [234.1] \sin [123.4]}{D}.$$

69. 5° *Angles du biplan* $x_1 = x_2 = 0$ avec le biplan $x_3 = x_4 = 0$.

La distance Δ_3 d'un point $(x_1, x_2, 0, 0)$ du premier biplan à sa projection $(0, 0, \xi_3, \xi_4)$ sur le second sera donnée par la formule

$$\Delta_3^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + a_{44}\xi_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{34}\xi_3\xi_4 - 2a_{13}x_1\xi_3 - 2a_{14}x_1\xi_4 - 2a_{23}x_2\xi_3 - 2a_{24}x_2\xi_4,$$

où ξ_3 et ξ_4 seront déterminés par les équations de condition

$$(98) \quad \begin{cases} a_{33}\xi_3 + a_{23}\xi_4 - a_{13}x_1 - a_{23}x_2 = 0, \\ a_{23}\xi_3 + a_{44}\xi_4 - a_{14}x_1 - a_{24}x_2 = 0, \end{cases}$$

lesquelles, multipliées par ξ_3 et ξ_4 et retranchées de l'expression de Δ_3^2 , la réduiront à la forme

$$(99) \quad \Delta_3^2 = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 - a_{13}x_1\xi_3 - a_{14}x_1\xi_4 - a_{23}x_2\xi_3 - a_{24}x_2\xi_4.$$

Posant d'ailleurs pour abrégier

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{d^2\mathcal{D}}{da_{13}da_{22}} = -\frac{d^2\mathcal{D}}{da_{12}da_{25}}, & \mathcal{B} &= \frac{d^2\mathcal{D}}{da_{23}da_{11}} = -\frac{d^2\mathcal{D}}{da_{21}da_{13}}, \\ \mathcal{C} &= \frac{d^2\mathcal{D}}{da_{14}da_{22}} = -\frac{d^2\mathcal{D}}{da_{12}da_{24}}, & \mathcal{D} &= \frac{d^2\mathcal{D}}{da_{24}da_{11}} = -\frac{d^2\mathcal{D}}{da_{21}da_{14}}, \\ \mathcal{E} &= \frac{d^2\mathcal{D}}{da_{11}da_{22}} = -\frac{d^2\mathcal{D}}{da_{12}da_{21}}.\end{aligned}$$

Les équations (98) donneront

$$\xi_3 = -\frac{\mathcal{A}x_1 + \mathcal{B}x_2}{\mathcal{E}}, \quad \xi_4 = -\frac{\mathcal{C}x_1 + \mathcal{D}x_2}{\mathcal{E}},$$

valeurs qui substituées dans (99) donneront

$$\Delta_3^2 = \frac{Mx_1^2 + 2Nx_1x_2 + Px_2^2}{\mathcal{E}},$$

où l'on a

$$\begin{aligned}M &= a_{11}\mathcal{E} + a_{13}\mathcal{A} + a_{14}\mathcal{C} = \frac{d\mathcal{D}}{da_{22}}, & P &= \frac{d\mathcal{D}}{da_{11}}, \\ 2N &= 2a_{12}\mathcal{E} + a_{13}\mathcal{B} + a_{23}\mathcal{A} + a_{14}\mathcal{D} + a_{24}\mathcal{C} \\ &= a_{12}\mathcal{E} + a_{13}\mathcal{B} + a_{14}\mathcal{D} + a_{21}\mathcal{E} + a_{23}\mathcal{B} + a_{24}\mathcal{C} \\ &= -\frac{d\mathcal{D}}{da_{21}} - \frac{d\mathcal{D}}{da_{12}} = -2\frac{d\mathcal{D}}{da_{12}}.\end{aligned}$$

D'autre part, la distance Δ_4 du point $(x_1, x_2, 0, 0)$ à l'origine des coordonnées, intersection des deux biplans considérés sera donnée par la formule

$$\Delta_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2,$$

et les carrés des sinus des angles cherchés seront donnés par les maxima et minima de la formule

$$\frac{\Delta_3^2}{\Delta_4^2} = \frac{Mx_1^2 + 2Nx_1x_2 + Px_2^2}{\mathcal{E}(x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + x_2^2)} = \Phi.$$

Les valeurs du rapport $\frac{x_1}{x_2}$ qui rendent minimum cette expression seront données par les formules

$$(100) \quad \begin{cases} Mx_1 + Nx_2 = \rho \mathcal{E}(x_1 + a_{12}x_2), \\ Nx_1 + Px_2 = \rho \mathcal{E}(a_{12}x_1 + x_2), \end{cases}$$

ρ étant un facteur constant qui doit être choisi de telle sorte que les deux équations (90) se réduisent à une seule. On aura donc

$$\begin{vmatrix} M - \mathcal{E}\rho & N - a_{12}\mathcal{E}\rho \\ N - a_{12}\mathcal{E}\rho & P - \mathcal{E}\rho \end{vmatrix} = 0.$$

D'ailleurs les équations (100) respectivement multipliées par x_1 et x_2 et ajoutées ensemble donneront

$$\Phi = \rho\Psi.$$

Donc les maxima et minima cherchés de l'expression $\frac{\Phi}{\Psi}$ seront les racines de l'équation en ρ .

VII. CINÉMATIQUE.

70. Nous appellerons *mouvement* d'un corps dans l'espace l'opération qui consiste à opérer sur les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ de chacun de ses points la substitution

$$(101) \quad \Sigma = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + \alpha_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + \alpha_n \end{vmatrix},$$

$a_{11}, \dots, a_{nn}$ étant les coefficients d'une substitution orthogonale ayant pour déterminant $+1$.

Si la substitution se réduit à

$$(102) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + \alpha_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & x_n + \alpha_n \end{vmatrix},$$

elle représentera une *translation*.

Si elle laisse immobile un point, elle représentera une *rotation autour de ce point*; si elle laisse immobiles tous les points d'un k -plan, ce sera une *rotation autour de ce k -plan*.

71. Il est clair que le mouvement général représenté par les équations (101) se décompose en deux autres : 1° Une rotation autour de l'origine

$$(103) \quad \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{vmatrix};$$

2° La translation (102).

Il est clair que cette translation peut elle-même se décomposer en une infinité de translations successives i finiment petites opérées suivant la même direction.

Nous allons montrer d'autre part que *la rotation (103) se décompose elle-même en une infinité de rotations infiniment petites.*

72. La chose est évidente s'il s'agit d'une rotation autour d'un des biplans coordonnés, tel que $x_1=0$, $x_2=0$; car deux mouvements de cette espèce,

$$(104) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha \\ x_2 & -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \\ x_3 & x_3 \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

et

$$(104) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta \\ x_2 & -x_1 \sin \beta + x_2 \cos \beta \\ x_3 & x_3 \\ \dots & \dots \end{vmatrix},$$

étant opérés successivement, donnent pour mouvement résultant le suivant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \cos (\alpha + \beta) + x_2 \sin (\alpha + \beta) \\ x_2 & -x_1 \sin (\alpha + \beta) + x_2 \cos (\alpha + \beta) \\ x_3 & x_3 \\ \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Soit donc m un entier très-grand. Le mouvement (104) s'obtiendra en répétant m fois le mouvement très-petit

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \cos \frac{\alpha}{m} + x_2 \sin \frac{\alpha}{m} \\ x_2 & -x_1 \sin \frac{\alpha}{m} + x_2 \cos \frac{\alpha}{m} \\ x_3 & x_3 \\ \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

73. Nous allons maintenant montrer : 1° que *toute rotation autour d'un ρ -plan*, tel que $x_1=\dots=x_\rho=0$ (et, par suite, en faisant $\rho=n$, toute rotation autour de l'origine), *résulte de la combinaison de rotations autour des biplans coordonnés*; 2° que *parmi les rotations autour de ce ρ -plan, il en est une qui remplace x_1 par $a_{11}x_1+\dots+a_{1\rho}x_\rho$, quels que soient $a_{11}, \dots, a_{1\rho}$, pourvu qu'ils satisfassent à l'unique condition*

$$a_{11}^2 + \dots + a_{1\rho}^2 = 1.$$

Cela est évident pour les rotations autour d'un biplan.

Supposons que ce soit prouvé pour les rotations autour d'un ρ -plan; nous allons voir que ce sera encore vrai pour les rotations autour d'un $\rho+1$ -plan.

On aura par hypothèse une substitution orthogonale de la forme

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + \dots + a_{1\rho}x_\rho \\ \vdots & \vdots \\ x_\rho & a_{\rho 1}x_1 + \dots + a_{\rho\rho}x_\rho \\ x_{\rho+1} & x_{\rho+1} \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

dérivée des substitutions analogues à (104), $a_{11}, \dots, a_{\rho 1}$ étant assujettis à cette seule condition

$$a_{11}^2 + \dots + a_{\rho 1}^2 = 1.$$

Combinant cette substitution avec la suivante

$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \cos \alpha + x_{\rho+1} \sin \alpha \\ \vdots & \vdots \\ x_{\rho+1} & -x_{\rho+1} \sin \alpha + x_{\rho+1} \cos \alpha \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix},$$

on aura comme résultante une substitution autour du $\rho+1$ -plan $x_1 = \dots = x_{\rho+1} = 0$, laquelle remplacera x_1 par $a_{11} \cos \alpha x_1 + \dots + a_{1\rho} \cos \alpha x_\rho + \sin \alpha x_{\rho+1}$, expression dont les coefficients seront évidemment assujettis à la seule condition

$$(a_{11} \cos \alpha)^2 + \dots + (a_{1\rho} \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Soit maintenant U une rotation quelconque effectuée autour du $\rho+1$ -plan $x_1 = \dots = x_{\rho+1} = 0$; $b_{11}x_1 + \dots + b_{1,\rho+1}x_{\rho+1}$ l'expression par laquelle elle remplace x_1 ; on pourra choisir S et T de telle sorte qu'on ait $a_{11} \cos \alpha = b_{11}$, $\dots$, $a_{1\rho} \cos \alpha = b_{1\rho}$, $\sin \alpha = b_{1,\rho+1}$; cela fait, on aura $U = STV$, V étant une nouvelle substitution qui n'altérera plus x_1 . Donc V sera une rotation autour du ρ -plan $x_2 = \dots = x_{\rho+1} = 0$ et pourra s'obtenir, par hypothèse, en combinant ensemble des rotations autour des biplans coordonnés.

74. On obtient aisément la forme générale des substitutions linéaires orthogonales infiniment voisines de l'unité. Posons en effet dans les équations de l'orthogonalité

$$(105) \quad a_{1\rho}^2 + \dots + a_{\rho\rho}^2 = 1,$$

$$(106) \quad a_{1\rho}a_{1\sigma} + \dots + a_{\rho\rho}a_{\rho\sigma} = 0,$$

$$a_{\rho\rho} = 1 + \varepsilon_{\rho\rho}, \quad a_{\rho\sigma} = \varepsilon_{\rho\sigma},$$

$\varepsilon_{\rho\rho}$ et $\varepsilon_{\rho\sigma}$ étant des quantités très-petites, dont on puisse négliger les produits et les carrés. Les équations (105) et (106) donneront $\varepsilon_{\rho\rho} = 0$, $\varepsilon_{\rho\sigma} + \varepsilon_{\sigma\rho} = 0$, ce qui donnera pour l'expression générale des rotations infiniment petites la suivante

$$(107) \quad S = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + \varepsilon_{12}x_2 + \dots \\ x_2 & -\varepsilon_{12}x_1 + x_2 + \dots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

En particulier, une rotation infiniment petite autour du biplan (x_1, x_2) sera de la forme

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 + \varepsilon x_2 \\ x_2 & -\varepsilon x_1 + x_2 \\ x_3 & x_3 \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

75. Pour pénétrer plus avant dans la nature des mouvements que l'on peut exécuter dans l'espace, il importe de simplifier leur expression par un changement de coordonnées convenable. Mais avant de traiter cette question, il convient de dire quelques mots des substitutions linéaires générales, dont les substitutions orthogonales que nous considérons ici ne sont qu'un cas particulier.

Soit

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots & \vdots \\ x_n & a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{vmatrix}$$

une substitution linéaire. Elle multipliera la fonction linéaire

$$y = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

par un facteur constant s , si l'on a les équations

$$(108) \quad \begin{cases} a_{11}c_1 + \dots + a_{n1}c_n = sc_1, \\ \vdots \\ a_{n1}c_1 + \dots + a_{nn}c_n = sc_n. \end{cases}$$

Pour pouvoir satisfaire à ces équations sans annuler à la fois $c_1, \dots, c_n$, il faudra que l'on ait

$$(109) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - s & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation donnera, pour s , n valeurs généralement distinctes $s_1, \dots, s_n$ (nous laissons de côté le cas des racines égales, qui sort de notre sujet actuel ; il peut d'ailleurs se traiter par des procédés semblables à ceux que nous avons exposés tout au long dans notre *Traité des substitutions*, liv. II, chap. II, pour une question analogue). Ces valeurs étant substituées successivement dans les équations (108), elles détermineront les rapports des quantités $c_1, \dots, c_n$. On obtiendra donc n fonctions

$$y_1 = c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n, \dots, y_n = c_{n1}x_1 + \dots + c_{nn}x_n,$$

que S multiplie respectivement par $s_1, \dots, s_n$. En les prenant pour variables indépendantes à la place de $x_1, \dots, x_n$, on donnera à S la forme canonique

$$(110) \quad \begin{vmatrix} y_1 & s_1 y_1 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ y_n & s_n y_n \end{vmatrix}.$$

On voit par ce qui précède que cette forme canonique est unique. Pour que deux substitutions S et S' soient transformables l'une dans l'autre par une substitution linéaire, il sera évidemment nécessaire et suffisant qu'elles aient la même forme canonique. Donc, l'équation en s qui détermine les coefficients de la forme canonique doit être la même pour S que pour S'. Les n coefficients de cette équation seront autant d'*invariants*, dont les valeurs caractériseront ce qui, dans la substitution considérée, est permanent et indépendant du choix des indices.

76. Les invariants de la substitution S satisfont à des équations différentielles partielles, qu'il est aisé d'établir.

Soit $\varphi(a_{11}, \dots, a_{nn})$ un de ces invariants; si S, transformé par une substitution linéaire quelconque T, prend la forme

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & a'_{11}x_{11} + \dots + a'_{1n}x_n \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ x_n & a'_{n1}x_1 + \dots + a'_{nn}x_n \end{vmatrix},$$

on aura la condition

$$(111) \quad \varphi(a'_{11}, \dots, a'_{nn}) = \varphi(a_{11}, \dots, a_{nn}).$$

Supposons que T soit une substitution infiniment voisine de l'unité et de la forme

$$(112) \quad \begin{vmatrix} x_1, \dots, x_{p-1} & x_1, \dots, x_{p-1} \\ x_p & x_p + \varepsilon x_\sigma \\ x_{p+1}, \dots, x_n & x_{p+1}, \dots, x_n \end{vmatrix},$$

ε étant très-petit; il viendra

$$\begin{aligned} a'_{pq} &= a_{pq} & \text{si } p \geq p, q \geq \sigma, \\ a'_{p\sigma} &= a_{p\sigma} - \varepsilon a_{p\sigma} & \text{si } p \geq p, \\ a'_{\sigma q} &= a_{\sigma q} + \varepsilon a_{\sigma q} & \text{si } q \geq \sigma, \\ a'_{p\sigma} &= a_{p\sigma} + \varepsilon a_{\sigma\sigma} - \varepsilon a_{\sigma p} - \varepsilon^2 a_{\sigma p}. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (111) et négligeant le carré de ε , il viendra

$$- \sum_p \frac{d\varphi}{da_{p\sigma}} a_{p\sigma} + \sum_q \frac{d\varphi}{da_{\sigma q}} a_{\sigma q} + \frac{d\varphi}{da_{\sigma\sigma}} (a_{\sigma\sigma} - a_{\sigma p}) = 0,$$

expression qui prendra la forme plus simple

$$\sum \frac{d\varphi}{da_{pq}} a_{pq} = \sum \frac{d\varphi}{da_{qq}} a_{qq},$$

en supprimant les restrictions $p \leq \rho$, $q \leq \sigma$.

En faisant varier ρ et σ , on obtiendra une suite d'équations analogues, qui suffiront à exprimer que φ est invariable par les substitutions linéaires de déterminant 1 ; car on sait que toute substitution de cette sorte s'obtient en combinant des substitutions analogues à (112).

77. Pour que φ soit invariable par toute transformation linéaire, il faudra de plus qu'il ne change pas, lorsque la transformante sera de la forme

$$\begin{vmatrix} x_1, \dots, x_{\rho-1} & x_1, \dots, x_{\rho-1} \\ x_{\rho} & (1+\epsilon)x_{\rho} \\ x_{\rho+1}, \dots, x_n & x_{\rho+1}, \dots, x_n \end{vmatrix}.$$

Mais on aura alors

$$a'_{pq} = a_{pq} \text{ si } p \geq \rho, q \geq \rho \text{ ou si } p = q = \rho,$$

$$a'_{\rho\rho} = (1+\epsilon)a_{\rho\rho},$$

$$a'_{\rho\rho} = \frac{1}{1+\epsilon} a_{\rho\rho},$$

et l'équation (111) donnera l'équation différentielle

$$\sum \frac{d\varphi}{da_{qp}} = \sum \frac{d\varphi}{da_{pp}}.$$

78. Si l'on veut que la substitution U, qui transforme S en S', soit non-seulement linéaire, mais orthogonale, on aura $\frac{n(n-1)}{2}$ nouvelles équations de condition, exprimant que *les carrés des cosinus des angles mutuels des plans*

$$y_1 = 0, \dots, y_n = 0,$$

sont égaux à ceux des plans

$$y'_1 = 0, \dots, y'_n = 0,$$

auxquels il faut rapporter S' pour la ramener à sa forme canonique.

En effet, s'il existe des variables $x'_1, \dots, x'_n$ liées orthogonalement à $x_1, \dots, x_n$, et telles que S', rapporté à ces nouvelles variables, ait la même forme que S rapporté à $x_1, \dots, x_n$; S', rapporté aux variables

$$y'_1 = c_{11}x'_1 + \dots + c_{1n}x'_n, \dots, y'_n = c_{n1}x'_1 + \dots + c_{nn}x'_n,$$

aura la forme canonique (110). D'ailleurs le système d'axes $x'_1, \dots, x'_n$ étant

aura une racine réelle ou un couple de racines imaginaires, on appliquera de nouveau à S un des deux modes de réduction ci-dessus. Poursuivant ainsi, on arrivera finalement à mettre S sous une forme telle que la suivante, où nous changeons pour plus de commodité, l'ordre et la désignation des variables

$$S = \begin{vmatrix} y_1, y_2 & y_1 \cos \alpha_1 + y_2 \sin \alpha_1, -y_1 \sin \alpha_1 + y_2 \cos \alpha_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{2\rho-1}, y_{2\rho} & y_{2\rho-1} \cos \alpha_\rho + y_{2\rho} \sin \alpha_\rho, -y_{2\rho-1} \sin \alpha_\rho + y_{2\rho} \cos \alpha_\rho & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{2\rho+1}, \dots, & y_{2\rho} + \sigma - y_{2\rho+1}, \dots, -y_{2\rho} + \sigma & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{2\rho} + \sigma + 1, y_n & y_{2\rho} + \sigma + 1, \dots, y_n & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Le déterminant de la substitution ci-dessus est évidemment égal à $(-1)^\sigma$; et comme il est égal à 1, par hypothèse, σ sera un nombre pair $2\sigma'$.

82. Cela posé, admettons d'abord que n soit un nombre pair 2μ ; $\tau = 2\mu$. Si l'on a $\sigma = 0, \tau = 0$, S sera de la forme

$$(113) S = \begin{vmatrix} y_1, y_2 & y_1 \cos \alpha_1 + y_2 \sin \alpha_1, -y_1 \sin \alpha_1 + y_2 \cos \alpha_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{2\mu-1}, y_{2\mu} & y_{2\mu-1} \cos \alpha_\mu + y_{2\mu} \sin \alpha_\mu, -y_{2\mu-1} \sin \alpha_\mu + y_{2\mu} \cos \alpha_\mu & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

laquelle forme générale contient comme cas particulier celui où l'on aurait $\sigma = 2\sigma', \tau = 2\tau'$. Il suffirait en effet, pour obtenir la substitution relative à ce cas, de poser dans l'expression précédente

$$(114) \quad \alpha_\mu - \sigma' - \tau' = \dots = \alpha_\mu - \tau' = \pi, \quad \alpha_\mu - \tau' + 1 = \dots = \alpha_\mu = 0.$$

Si n est un nombre impair $2\mu + 1, \tau = 2\mu + 1 - 2\rho - 2\sigma'$ sera impair, et l'on aura, en supposant $\sigma = 0, \tau = 1$,

$$(115) S = \begin{vmatrix} y_1, y_2 & y_1 \cos \alpha_1 + y_2 \sin \alpha_1, -y_1 \sin \alpha_1 + y_2 \cos \alpha_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{2\mu-1}, y_{2\mu} & y_{2\mu-1} \cos \alpha_\mu + y_{2\mu} \sin \alpha_\mu, -y_{2\mu-1} \sin \alpha_\mu + y_{2\mu} \cos \alpha_\mu & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{2\mu+1} & y_{2\mu+1} & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Et la formule relative au cas où l'on aurait $\sigma = 2\sigma', \tau = 2\tau' + 1$ s'obtiendra encore comme cas particulier de la précédente, en y faisant les suppositions (114).

83. Les expressions canoniques (113) et (115), auxquelles a été ramenée la substitution S, donnent immédiatement les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — Dans l'espace à 2μ dimensions, toute rotation autour d'un point est la résultante de μ rotations effectuées autour de μ biplans rectangulaires $x_1 = x_2 = 0, \dots, x_{2\mu-1} = x_{2\mu} = 0$ passant par ce point.

THÉORÈME II. — Dans l'espace à $2\mu + 1$ dimensions, toute rotation autour d'un point est une rotation autour d'une droite $x_1 = \dots = x_{2\mu} = 0$ passant par ce point, et sera la résultante de μ rotations effectuées autour de μ biplans rectangulaires $x_1 = x_2 = 0, \dots, x_{2\mu-1} = x_{2\mu} = 0$ passant par cette droite.

Les μ biplans ainsi définis seront dits les biplans *principaux* de la substitution considérée. On peut d'ailleurs évidemment, sans altérer la forme canonique de S, choisir à volonté dans chacun de ces biplans les deux plans rectangulaires que l'on prendra pour plans coordonnés.

84. Le théorème que, dans l'espace à $2\mu + 1$ dimensions, toute rotation autour d'un point s'opère autour d'une droite a été déjà donné par M. Schläfli (*Journal de Crelle*, t. 65). L'auteur signale également l'existence de μ invariants dans la substitution orthogonale. Mais il ne nous paraît pas avoir établi que ces invariants sont les seuls; et il ne donne pas la réduction de la substitution à sa forme canonique, laquelle nous semble indispensable pour se rendre un compte bien net de la nature de ces invariants.

85. Il est aisé d'exprimer les cosinus des angles $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ en fonction des invariants de la substitution S.

En effet, supposons d'abord qu'il s'agisse d'un espace à 2μ dimensions. L'équation caractéristique (109) deviendra, en y supposant S ramenée à la forme canonique (113),

$$0 = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 - s & \sin \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 - s & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \cos \alpha_2 - s & \sin \alpha_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 - s & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

$$= (s^2 - 2s \cos \alpha_1 + 1) \dots (s^2 - 2s \cos \alpha_n + 1).$$

Comparant cette forme réduite à la forme générale

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} - s & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = f(s) = s^{2\mu} + A_1 s^{2\mu-1} + \dots + A_{2\mu},$$

et posant, pour abréger,

$$B_1 = \sum_r \cos \alpha_r, B_2 = \sum_{r,r'} \cos \alpha_r \cos \alpha_{r'}, \dots,$$

il vient

$$(116) \quad \begin{cases} A_1 = -2B_1, \\ A_2 = 4B_2 + n, \\ A_3 = -8B_3 - 2(n-1)B_1, \\ \dots \dots \dots \\ A_m = \sum (-2)^{m-2\rho} \frac{(n-m+2\rho) \dots (n-m+\rho+1)}{1 \cdot 2 \dots \rho} B_{m-2\rho}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

la sommation s'étendant depuis $\rho = 0$ jusqu'à $\rho = \frac{m}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$ suivant que m est pair ou impair.

En renversant les relations (116), on obtiendra $B_1, \dots, B_\mu$ en fonction des invariants $A_1, \dots, A_{2\mu}$. D'ailleurs $B_1, \dots, B_\mu$ sont les coefficients d'une équation du degré μ , dont $\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_\mu$ sont les racines.

S'il s'agit d'un espace à $2\mu + 1$ dimensions, S aura la forme canonique (115) qui a pour équation caractéristique

$$0 = (s^2 - 2s \cos \alpha_1 + 1) \dots (s^2 - 2s \cos \alpha_{2\mu} + 1) (1 - s) \\ = (s^{2\mu} + A_1 s^{2\mu-1} + \dots + A_{2\mu}) (1 - s),$$

les coefficients $A_1, \dots, A_{2\mu}$ étant définis par les relations (116).

En comparant cette équation à l'équation générale

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} - s & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = f(s) = -s^{2\mu+1} + C_1 s^{2\mu} + \dots + C_{2\mu+1},$$

on aura les invariants $C_1, \dots, C_{2\mu+1}$ exprimés par les relations

$$C_1 = 1 - A_1, \dots, C_m = A_m - A_{m-1}.$$

Donc, ici encore, les invariants s'exprimeront en fonction de $B_1, \dots, B_{2\mu}$ et réciproquement.

De ce qui précède, on déduit cette conséquence remarquable :

86. THÉOREME III. — *Si deux substitutions orthogonales S, S' sont transformables l'une dans l'autre par une substitution linéaire, on pourra toujours opérer cette transformation par une substitution orthogonale.*

En effet, si S' est transformable en S , elle aura les mêmes invariants que S ; donc les quantités $\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_\mu$ seront égales aux quantités analogues $\cos \alpha'_1, \dots, \cos \alpha'_\mu$ que contient la forme canonique de S' . Donc S et S' auront même forme canonique, au signe près des sinus des angles $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha'_1, \dots, \alpha'_n$. Mais on peut changer à volonté le signe de $\sin \alpha_1$, par exemple, car il suffit de changer le signe d'une des deux coordonnées x_1, x_2 ; changement qui reste sans influence sur l'orthogonalité des axes coordonnés. Donc S et S' ont même forme canonique, et l'on passera de l'une à l'autre par la substitution orthogonale qui sert à passer des coordonnées rectangulaires $x_1, \dots, x_n$ aux coordonnées $x'_1, \dots, x'_n$ également rectangulaires, pour les quelles S' est réduite à sa forme canonique.

87. Les substitutions S, S' seront dites *semblables* ou *inversement semblables*, suivant que la substitution orthogonale qui permet de transformer l'une dans l'autre a pour déterminant $+1$ ou -1 .

Il est intéressant de déterminer à quel caractère on pourra distinguer l'une de l'autre ces deux sortes de similitude.

Supposons d'abord $n = 2\mu$, et considérons les deux expressions

$$f(1) = \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & \dots & a_{1,2\mu} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{2\mu,1} & \dots & a_{2\mu,2\mu} - 1 \end{vmatrix}, \quad f(-1) = \begin{vmatrix} a_{11} + 1 & \dots & a_{1,2\mu} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{2\mu,1} & \dots & a_{2\mu,2\mu} + 1 \end{vmatrix},$$

qui toutes deux sont des invariants. Leur produit, effectué suivant la règle connue de la multiplication des déterminants, et simplifié à l'aide des équations qui définissent l'orthogonalité, se réduira à

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{21} - a_{12} & a_{31} - a_{13} & \dots \\ -a_{21} + a_{12} & 0 & \dots & \dots \\ -a_{31} + a_{13} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant, gauche, symétrique, et de degré pair est un carré parfait, que nous pourrions désigner par R^2 . Comme c'est d'ailleurs un invariant, la quantité R ne pourra que changer de signe lorsqu'on transformera S par une substitution orthogonale quelconque.

Or, si la substitution orthogonale qui change S en S' a son déterminant égal à $+1$, elle résultera de la combinaison successive de substitutions infiniment petites. Transformant successivement S par ces substitutions composantes, on ne pourra altérer à chaque fois R que d'une quantité infiniment petite; et comme R doit rester invariable, ou changer de signe, il restera invariable. On aura donc $R = R', R'$ étant la fonction analogue à R formée avec les coefficients de S' .

Réciproquement, si $R = R'$, la substitution qui sert à passer de S à S' aura pour déterminant $+1$. En effet, soit S'' ce que devient S en y changeant le signe de l'une des variables; la fonction R sera changée en $R'' = -R$; et les substitutions orthogonales par lesquelles on passe de S à S'' ou de S'' à S' auront pour déterminant -1 . La substitution résultante, qui sert à passer de S à S' , aura donc le déterminant $+1$.

Soit maintenant $n = 2\mu + 1$. L'équation $f(s) = 0$ aura une racine égale à 1 ; et l'on pourra trouver une fonction des variables que S n'altère pas. Ses coefficients seront des fonctions rationnelles de $a_{11}, \dots, a_{nn}$, et l'on pourra, par un changement d'indices indépendants qui n'introduit aucune irrationnelle, mettre S sous la forme

$$\begin{vmatrix} x'_1 & b_{11}x'_1 + \dots + b_{1,2\mu}x'_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x'_{2\mu} & b_{2\mu,1}x'_1 + \dots + b_{2\mu,2\mu}x'_{2\mu} \\ x'_{2\mu+1} & x'_{2\mu+1} \end{vmatrix},$$

et la quantité $\mathcal{R}$, formée avec $b_{11}, \dots, b_{2\mu,2\mu}$ comme R l'était tout à l'heure avec $a_{11}, \dots, a_{2\mu,2\mu}$, indiquera par son signe celui du déterminant de la substitution qui transforme S' en S .

Lorsque la substitution S est mise sous sa forme canonique, on trouve immédiatement

$$R = \sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_\mu.$$

88. La détermination des invariants $B_1, \dots, B_\mu$ s'obtient d'une manière plus élégante lorsque la rotation S est infiniment petite.

Nous avons vu que S sera de la forme (107) et l'équation en s sera

$$f(s) = \begin{vmatrix} 1-s & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} & \dots \\ \epsilon_{21} & 1-s & \epsilon_{23} & \dots \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & 1-s & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

avec la condition $\epsilon_{\sigma\sigma} + \epsilon_{\sigma\sigma} = 0$.

Cette équation, développée suivant les puissances de $1-s=t$, sera de la forme

$$(117) \quad t^n + s_1 t^{n-1} + \dots + s_\rho t^{n-\rho} + \dots = 0,$$

s_ρ désignant la somme des mineurs dérivés du déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} & \dots \\ \epsilon_{21} & 0 & \epsilon_{23} & \dots \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

en y supprimant $n-\rho$ colonnes choisies à volonté, et les lignes de même rang. Chacun de ces mineurs étant un déterminant gauche sera nul si ρ est impair, un carré si ρ est pair.

D'autre part, S étant supposé réduit à sa forme canonique, on aura, si $n = 2\mu$,

$$f(s) = (s^2 - 2s \cos \alpha_1 + 1) \dots (s^2 - 2s \cos \alpha_\mu + 1).$$

Cette expression, égale à 0, donnera pour s les racines

$$\cos \alpha_1 \pm i \sin \alpha_1, \dots, \cos \alpha_\mu \pm i \sin \alpha_\mu,$$

lesquelles se réduiront sensiblement, $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ étant très-petits, à

$$1 \pm i\alpha_1, \dots, 1 \pm i\alpha_\mu.$$

L'équation (117) en t aura donc pour racines $\pm i\alpha_1, \dots, \pm i\alpha_\mu$, et, en prenant $-t^2$ pour inconnue, l'équation aura pour racines $\alpha_1^2, \dots, \alpha_\mu^2$.

Si $n = 2\mu + 1$, on aura

$$f(s) = (s^2 - 2s \cos \alpha_1 + 1) \dots (s^2 - 2s \cos \alpha_\mu + 1) (1-s).$$

L'équation en t aura une racine nulle, que l'on supprimera; prenant ensuite $-t^2$ pour inconnue, on aura ici encore une équation du degré μ , déterminant $\alpha_1^2, \dots, \alpha_\mu^2$.

si l'on a la condition.

$$\lambda_{2\rho+1}\delta_{2\rho+1} + \dots + \lambda_n\delta_n = 0.$$

Cette condition détermine une seule des quantités λ en fonction des autres, qui restent arbitraires. Les fonctions de la forme Ψ que Σ n'altère pas, égales à zéro, détermineront donc un $n-2\rho-1$ -plan $P_{n-2\rho-1}$, dans lequel on pourra trouver $n-2\rho-1$ plans rectangulaires $z_{2\rho+1}, \dots, z_{n-1}$, le $n-2\rho$ -plan $y_{2\rho+1} = \dots = y_n = 0$ résultera d'ailleurs de l'intersection de $P_{n-2\rho-1}$ avec un dernier plan z_n perpendiculaire aux précédents. Prenant ces plans pour plans coordonnés, au lieu de $y_{2\rho+1}, \dots, y_n$, Σ prendra la forme

$$(118) \quad \begin{vmatrix} z_1, z_2 & z_1 \cos \alpha_1 + z_2 \sin \alpha_1, & -z_1 \sin \alpha_1 + z_2 \cos \alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{2\rho-1}, z_{2\rho} & z_{2\rho-1} \cos \alpha_\rho + z_{2\rho} \sin \alpha_\rho, & -z_{2\rho-1} \sin \alpha_\rho + z_{2\rho} \cos \alpha_\rho \\ z_{2\rho+1}, \dots, z_{n-1} & z_{2\rho+1}, \dots, z_{n-1} \\ z_n & z_n + \delta \end{vmatrix}.$$

Donc le mouvement cherché résultera de la combinaison d'un mouvement de rotation autour d'un 2ρ -plan, joint à un mouvement de translation le long d'un axe perpendiculaire. Un semblable mouvement peut s'appeler *hélicoïdal*.

D'ailleurs, si l'on a $\rho = 0$, le mouvement se réduit à une translation ; si $n-2\rho = 0$ ou $n-2\rho > 0$, mais $\delta = 0$, il se réduit à une rotation. On a donc ce théorème :

Tout mouvement est une rotation, ou une translation, ou un mouvement hélicoïdal.

90. Dans l'espace à $2\mu+1$ dimensions, le mouvement hélicoïdal est la règle, et les autres sont des cas particuliers ; car $n-2\rho$ n'est pas nul et δ diffère en général de zéro.

Au contraire, dans l'espace à 2μ dimensions, on a en général $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ différents de zéro, et l'on aura par suite $n-2\rho = 0$, sauf les cas particuliers.

91. Voici enfin deux derniers théorèmes, qui sont la généralisation de ceux qui ont servi de point de départ à M. Chasles dans ses belles recherches sur le déplacement des solides.

Supposons $\alpha_1, \dots, \alpha_\rho, \delta$ infiniment petits, et négligeons les carrés de ces quantités. Il viendra, pour la représentation canonique d'un mouvement infiniment petit

$$(119) \quad \begin{vmatrix} z_1, z_2 & z_1 + \alpha_1 z_2, & -\alpha_1 z_1 + z_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{2\rho-1}, z_{2\rho} & z_{2\rho-1} + \alpha_\rho z_{2\rho}, & -\alpha_\rho z_{2\rho-1} + z_\rho \\ z_{2\rho+1}, \dots, z_{n-1} & z_{2\rho+1}, \dots, z_{n-1} \\ z_n & z_n + \delta \end{vmatrix},$$

et soient $\Delta\zeta_1, \dots, \Delta\zeta_n$ les accroissements des coordonnées du point $\zeta_1, \dots, \zeta_n$.
Le plan mené par ce point normalement au déplacement aura pour équation

$$\begin{aligned} 0 &= (z_1 - \zeta_1) \Delta\zeta_1 + \dots + (z_n - \zeta_n) \Delta\zeta_n \\ &= (z_1 - \zeta_1) \alpha_1 \zeta_2 - (z_2 - \zeta_2) \alpha_1 \zeta_1 + \dots + (z_{2p-1} - \zeta_{2p-1}) \alpha_1 \zeta_{2p} \\ &\quad - (z_{2p} - \zeta_{2p}) \alpha_1 \zeta_{2p-1} + (z_n - \zeta_n) \delta \\ &= \alpha_1 (z_1 \zeta_2 - z_2 \zeta_1) + \dots + \alpha_p (z_{2p-1} \zeta_{2p} - z_{2p} \zeta_{2p-1}) + \delta (z_n - \zeta_n). \end{aligned}$$

Cette équation étant symétrique par rapport à $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ et $z_1, \dots, z_n$, on a le théorème de réciprocité suivant :

THÉORÈME. — *Si le plan normal au déplacement du point $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ passe par le point $z_1, \dots, z_n$, le plan normal du déplacement de $z_1, \dots, z_n$ passera par $\zeta_1, \dots, \zeta_n$.*

92. Si ce point $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ se meut dans un k -plan]

$$(120) \quad A_1 = \dots = A_k = 0,$$

les plans normaux aux déplacements se couperont suivant un $n-k+1$ -plan *conjugué au k -plan*, lequel s'obtiendra en éliminant k des quantités $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ de l'équation du plan normal à l'aide des équations (120), et égalant à zéro les coefficients des quantités restantes.

Nous supposons, dans ce qui va suivre, qu'on a $k \leq n-k+1$, d'où $k \leq \frac{n+1}{2}$, $2k-1 \leq n$.

93. THÉORÈME. — *Si les deux multiplans conjugués P_k, P_{n-k+1} ne sont pas contenus dans un même plan, le mouvement considéré S pourra se décomposer en deux rotations autour de ces multiplans.*

En effet, soit p' un point de P_{n-k+1} situé en dehors de P_k . Par ce point et par P_k on pourra faire passer un $k-1$ -plan P_{k-1} . Soit p'' un point de P_{n-k+1} non contenu dans P_{k-1} ; par p'' et P_{k-1} , on fera passer un $k-2$ -plan P_{k-2} , etc. On arrivera enfin à un plan P_1 passant par P_k et par $k-1$ points convenablement choisis dans P_{n-k+1} .

Cela posé, nous prendrons pour plan des x_1 le plan P_1 ; pour plan des x_2 , un plan mené par P_2 perpendiculairement à P_1 ; ... ; pour plan des x_k , un plan mené par P_k perpendiculairement à P_{k-1} ; enfin, si $2k-1 < n$, $n-2k+1$ plans rectangulaires et perpendiculaires à P_{2k-1} ,

$$x_{2k} = 0, \dots, x_n = 0.$$

Soient respectivement

$$\zeta'_1, \dots, \zeta'_n, \dots, \zeta_1^{(k-1)}, \dots, \zeta_n^{(k-1)}$$

les coordonnées de $p', \dots, p^{(k-1)}$. Les points $p', p'', \dots, p^{(k-1)}$ étant respectivement dans les multiplans $P_1, \dots, P_{k-1}$, on aura

$$(121) \quad \begin{cases} \zeta_1' = 0, \\ \zeta_1'' = \zeta_2'' = 0, \\ \zeta_1^{(k-1)} = \zeta_2^{(k-1)} = \dots = \zeta_{k-1}^{(k-1)} = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs p' n'est pas dans P_2 , p'' n'est pas dans P_3 , etc. ; donc on aura

$$\zeta_2 \geq 0, \zeta_3 \geq 0, \dots, \zeta_k^{(k-1)} \geq 0.$$

94. Cela posé, soit $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ un point quelconque de P_{n-k+1} ; $\Delta\zeta_1, \dots, \Delta\zeta_n$ les changements de ces coordonnées par suite du mouvement considéré. Le plan normal au déplacement sera

$$(122) \quad (x_1 - \zeta_1) \Delta\zeta_1 + \dots + (x_n - \zeta_n) \Delta\zeta_n = 0.$$

Par hypothèse, il doit passer par le multiplan P_k . Donc l'équation (122) doit être satisfaite identiquement en y posant $x_1 = \dots = x_k = 0$, ce qui donne les conditions

$$(123) \quad \Delta\zeta_{k+1} = \dots = \Delta\zeta_n = 0,$$

$$(124) \quad \zeta_1 \Delta\zeta_1 + \dots + \zeta_k \Delta\zeta_k = 0.$$

Soit d'ailleurs $z_1, \dots, z_n$ un autre point de P_{n-k+1} ; la distance de ce point au précédent ne doit pas être altérée; donc on aura

$$(z_1 - \zeta_1)(\Delta z_1 - \Delta\zeta_1) + \dots + (z_n - \zeta_n)(\Delta z_n - \Delta\zeta_n) = 0,$$

ou, en tenant compte des relations (123) et (124) et des relations analogues relatives à $z_1, \dots, z_n$,

$$(125) \quad z_1 \Delta\zeta_1 + \zeta_1 \Delta z_1 + \dots + z_k \Delta\zeta_k + \zeta_k \Delta z_k = 0.$$

L'équation (125), appliquée au point p^{k-1} dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la dernière, se réduira à

$$\zeta_k^{(k-1)} \Delta\zeta_k^{(k-1)} = 0, \text{ d'où } \Delta\zeta_k^{(k-1)} = 0.$$

95. Soient maintenant $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ des quantités très-petites; considérons la substitution

$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + \varepsilon_1 x_k \\ x_2 & x_2 + \varepsilon_2 x_k \\ \dots & \dots \\ x_k & -\varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 x_2 - \dots + x_k \\ x_{k+1} & x_{k+1} \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

laquelle est une rotation autour de P_k . Pour que S se décompose en deux rotations autour de P_k et autour de P_{n-k+1} , il est évidemment nécessaire

et suffisant qu'il en soit de même de $ST = S'$. D'ailleurs S' fera subir aux coordonnées du point $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ les variations suivantes

$$(126) \quad \Delta' \zeta_1 = \Delta \zeta_1 + \varepsilon_1 \zeta_k, \quad \Delta' \zeta_2 = \Delta \zeta_2 + \varepsilon_2 \zeta_k, \dots,$$

$$(127) \quad \Delta' \zeta_k = \Delta \zeta_k - \varepsilon_1 \zeta_1 - \varepsilon_2 \zeta_2 - \dots,$$

$$(128) \quad \Delta' \zeta_{k+1} = \Delta \zeta_{k+1}, \dots, \Delta' \zeta_n = \Delta \zeta_n,$$

et, d'après ces formules, il est clair que si les Δ satisfont comme on l'a supposé aux relations (123), (124) et (125), les Δ' satisferont aux relations toutes semblables

$$(129) \quad \Delta' \zeta_{k+1} = \dots = \Delta' \zeta_n = 0,$$

$$(130) \quad \zeta_1 \Delta' \zeta_1 + \dots + \zeta_k \Delta' \zeta_k = 0,$$

$$(131) \quad z_1 \Delta' \zeta_1 + \zeta_1 \Delta' z_1 + \dots + z_k \Delta' \zeta_k + \zeta_k \Delta' z_k = 0.$$

Si maintenant on détermine ces arbitraires ε par les relations

$$\Delta \zeta_1^{(k-1)} + \varepsilon_1 \zeta_k^{(k-1)} = 0, \dots, \Delta \zeta_{k-1}^{(k-1)} + \varepsilon_{k-1} \zeta_k^{(k-1)} = 0,$$

ce qui ne peut souffrir de difficulté, $\zeta_k^{(k-1)}$ n'étant pas nul, on aura

$$(132) \quad \Delta' \zeta_1^{(k-1)} = \dots = \Delta' \zeta_{k-1}^{(k-1)} = 0.$$

On a d'ailleurs, $\zeta_1^{(k-1)}, \dots, \zeta_{k-1}^{(k-1)}$ étant nuls,

$$(133) \quad \Delta \zeta_k^{(k-1)} = \Delta \zeta_k^{(k-1)} = 0.$$

Donc la substitution T ne déplacera plus le point $p^{(k-1)}$.

96. Remplaçons maintenant, dans les équations (130) et (131), $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ par les valeurs particulières $\zeta_1^{(k-2)}, \dots, \zeta_k^{(k-2)}$ et $z_1, \dots, z_k$ par $\zeta_1^{(k-1)}, \dots, \zeta_k^{(k-1)}$. Elles se réduiront, en tenant compte des relations (121) et (133), à

$$\zeta_k^{(k-2)} \Delta' \zeta_k^{(k-2)} + \zeta_{k-1}^{(k-2)} \Delta' \zeta_{k-1}^{(k-2)} = 0,$$

$$\zeta_k^{(k-1)} \Delta' \zeta_k^{(k-2)} = 0,$$

d'où l'on déduit, $\zeta_k^{(k-1)}$ et $\zeta_{k-1}^{(k-2)}$ n'étant pas nuls,

$$\Delta' \zeta_k^{(k-2)} = 0, \quad \Delta' \zeta_{k-1}^{(k-2)} = 0.$$

Cela posé, considérons les substitutions

$$T' = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + \varepsilon'_1 x_{k-1} \\ x_2 & x_2 + \varepsilon'_2 x_{k-1} \\ \dots & \dots \\ x_{k-1} & -\varepsilon'_1 x - \varepsilon'_2 x_2 - \dots + x_{k-1} \\ x_k & x_k \\ \dots & \dots \end{vmatrix},$$

Supposons, au contraire, que z_1 soit nul. Par hypothèse, P_{n-k+1} contient un point $z_1, \dots, z_n$ qui n'est pas contenu dans le plan $x_1 = 0$. Donc z_1 ne sera pas nul : d'ailleurs on aura, par ce qui précède, $\Delta z_1 = \dots = \Delta z_n = 0$. Donc l'équation (125), appliquée aux deux points $z_1, \dots, z_n$ et $z_1, \dots, z_n$, se réduira à

$$z_1 \Delta z_1 = 0, \text{ d'où } \Delta z_1 = 0,$$

ce qui complète la démonstration.

98. Comme application particulière, proposons-nous de résoudre le problème de la composition des rotations autour d'un point dans l'espace à quatre dimensions.

Si l'on pose $n = 4$, la formule (97) qui représente une rotation infiniment petite R autour de l'origine contiendra six paramètres variables $\epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{14}, \epsilon_{23}, \epsilon_{24}, \epsilon_{34}$. Cela devait être; car une semblable rotation dépend de six éléments : 1° quatre angles, définissant la situation de ses biplans principaux ; 2° les amplitudes α, β des rotations partielles autour de ces biplans.

Cherchons à mettre la substitution sous une forme où ces deux sortes d'éléments soient immédiatement en évidence.

Soient $x = 0, y = 0, z = 0, u = 0$ les plans coordonnés, et supposons que l'un B des biplans principaux de R fasse les angles φ et ψ avec le biplan A formé des deux plans $x = 0, y = 0$. On pourra, comme nous l'avons montré (IV), remplacer x, y, z, u par de nouvelles coordonnées rectangulaires

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \lambda + y \sin \lambda, & y' &= -x \sin \lambda + y \cos \lambda, \\ z' &= z \cos \rho + y \sin \rho, & u' &= -z \sin \rho + u \cos \rho, \end{aligned}$$

telles que les biplans A et B soient respectivement représentés par les équations

$$x' = 0, y' = 0$$

et

$$X = x' \cos \varphi + z' \sin \varphi = 0, \quad Y = y' \cos \psi + u' \sin \psi = 0.$$

Le second biplan principal de R, étant perpendiculaire à B, sera l'intersection des deux plans

$$Z = -x' \sin \varphi + z' \cos \varphi = 0, \quad U = -y' \sin \psi + u' \cos \psi = 0.$$

Cela posé, prenons X, Y, Z, U pour plans coordonnés; la rotation R prendra sa forme canonique

$$\begin{vmatrix} X, Y & X + \alpha Y, & -\alpha X + Y \\ Z, U & Z + \beta U, & -\beta Z + U \end{vmatrix}.$$

La même substitution, rapportée aux coordonnées x', y', z', u' , prendra la forme

$$\begin{vmatrix} x' & x' + ay' + bu' \\ y' & -bx' + y' + cz' \\ z' & -cy' + z' + du' \\ u' & -bx' - dz' + u' \end{vmatrix},$$

en posant pour abréger

$$(134) \quad \begin{cases} a = \alpha \cos \varphi \cos \psi + \beta \sin \varphi \sin \psi, \\ b = -\alpha \cos \varphi \sin \psi + \beta \sin \varphi \cos \psi, \\ c = \alpha \sin \varphi \cos \psi - \beta \cos \varphi \sin \psi, \\ d = \alpha \sin \varphi \sin \psi + \beta \cos \varphi \cos \psi. \end{cases}$$

Enfin cette même substitution, rapportée aux coordonnées primitives x, y, z, u , sera de la forme

$$\begin{vmatrix} x & x + ay + ez + fu \\ y & -ax + y + gz + hu \\ z & -ex - gy + z + du \\ u & -fx - hy - dz + u \end{vmatrix},$$

e, f, g, h étant déterminés par les relations

$$(135) \quad \begin{cases} e = -b \sin \rho \cos \lambda - c \cos \rho \sin \lambda, \\ f = b \cos \rho \cos \lambda - c \sin \rho \sin \lambda, \\ g = -b \sin \lambda \sin \rho + c \cos \lambda \cos \rho, \\ h = b \sin \lambda \cos \rho + c \cos \lambda \sin \rho \end{cases}$$

99. Posons maintenant

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2\mathcal{A}, & \alpha - \beta &= 2\mathcal{B}, \\ \varphi - \psi &= m, & \varphi + \psi &= n, \\ \lambda + \rho &= \mu, & \lambda - \rho &= \nu. \end{aligned}$$

Les formules (134) et (135) deviendront

$$\begin{aligned} a &= \mathcal{A} \cos m + \mathcal{B} \cos n, \\ b &= \mathcal{A} \sin m - \mathcal{B} \sin n, \\ c &= \mathcal{A} \sin m + \mathcal{B} \sin n, \\ d &= \mathcal{A} \sin m - \mathcal{B} \cos n, \\ -e &= \mathcal{A} \sin m \sin \mu + \mathcal{B} \sin n \sin \nu, \\ f &= \mathcal{A} \sin m \cos \mu - \mathcal{B} \sin n \cos \nu, \\ g &= \mathcal{A} \sin m \cos \mu - \mathcal{B} \sin n \cos \nu, \\ h &= \mathcal{A} \sin m \sin \mu - \mathcal{B} \sin n \sin \nu. \end{aligned}$$

100. Considérons maintenant diverses rotations $R_1, R_2, \dots, R_k$; et soient $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, m_i, n_i, \mu_i, \nu_i, a_i, \dots, h_i$ les valeurs des paramètres $\mathcal{A}, \mathcal{B}, m, n, \mu, \nu, a, \dots, h$ pour la substitutions R_i ; $\mathcal{A}, \mathcal{B}, m, n, \mu, \nu, a, \dots, h$ leurs valeurs pour la substitution résultante R .

Les quantités $a_1, \dots, h_1, \dots, a_k, \dots, h_k$ étant supposées infiniment petites, on aura évidemment, en négligeant les termes du second ordre,

$$R' = R_1 \dots R_k = \begin{vmatrix} x & x & + y \sum_r a_r + z \sum_r e_r + u \sum_r f_r \\ y - x \sum_r e_r + y & + z \sum_r g_r + u \sum_r h_r \\ z - x \sum_r e_r - y \sum_r g_r + z & + u \sum_r d_r \\ u - x \sum_r f_r - y \sum_r h_r - z \sum_r d_r + u \end{vmatrix} \quad (r=1, 2, \dots, k).$$

On aura donc

$$\begin{aligned} (136) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A} \cos m &= \frac{1}{2}(a+d) = \frac{1}{2} \sum (a_r - d_r) = \sum \mathcal{A}_r \cos m_r, \\ \mathcal{A} \sin m \sin \mu &= \frac{1}{2}(h-e) = \frac{1}{2} \sum (h_r - e_r) = \sum \mathcal{A}_r \sin m_r \sin \mu_r, \\ \mathcal{A} \sin m \cos \mu &= \frac{1}{2}(f+g) = \frac{1}{2} \sum (f_r + g_r) = \sum \mathcal{A}_r \sin m_r \cos \mu_r, \end{aligned} \right. \\ (136) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{B} \cos n &= \frac{1}{2}(a-d) = \frac{1}{2} \sum (a_r - d_r) = \sum \mathcal{B}_r \cos n_r, \\ \mathcal{B} \sin n \sin \nu &= -\frac{1}{2}(e+h) = -\frac{1}{2} \sum (e_r + h_r) = \sum \mathcal{B}_r \sin n_r \sin \nu_r, \\ \mathcal{B} \sin n \cos \nu &= \frac{1}{2}(g-f) = \frac{1}{2} \sum (g_r - f_r) = \sum \mathcal{B}_r \sin n_r \cos \nu_r. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

De ces formules résulte cette conséquence remarquable que les six paramètres $\mathcal{A}, m, \mu, \mathcal{B}, n, \nu$ se partagent en deux groupes, $\mathcal{A}, m, \mu$ et $\mathcal{B}, n, \nu$, de telle sorte que les valeurs des paramètres de chaque groupe dans la rotation résultante dépendent exclusivement des valeurs de ces mêmes paramètres dans les substitutions composantes.

101. La loi de cette dépendance peut d'ailleurs se représenter géométriquement d'une manière fort simple. Menons dans l'espace ordinaire, à partir de l'origine des coordonnées, une droite OA de longueur $\mathcal{A}$, ayant l'angle μ pour azimuth et l'angle m pour co-latitude. Menons de même une autre droite OB de longueur $\mathcal{B}$, d'azimuth ν et de co-latitude n . Le système de ces deux droites donnera une image géométrique de la rotation R .

Cela posé, les équations (136) expriment que la droite OA a pour projections sur ces trois axes coordonnés la somme des projections des droites $OA_1, \dots, OA_k$ relatives aux rotations composantes $R_1, \dots, R_k$. De même les

équations (137) expriment que OB a pour projections la somme des projections de $OB_1, \dots, OB_r$. On a donc ce théorème :

Pour obtenir chacune des deux droites représentatives de la résultante d'un nombre quelconque de rotations concourantes, il suffira de composer, suivant les règles de la statique, les correspondantes qui servent à représenter les rotations composantes.

Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques ; par M. LAGUERRE.

(Séance du 26 mai 1875)

I

1. Je m'appuierai, dans tout ce qui suit, sur la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Étant données un nombre quelconque de courbes $K, K', K'', \dots$ et un lieu C défini par la condition qu'il y existe une relation, du reste arbitraire, entre les directions d'un certain nombre des tangentes que l'on peut mener aux courbes données par un point de ce lieu ; appelons C_0 le lieu que l'on obtient en remplaçant, dans la définition de la courbe C , la courbe K par les points de contact des tangentes qu'on peut lui mener par un point M du plan : cela posé, la droite polaire du point M , relativement à la courbe C , se confond avec la droite polaire du même point relativement à la courbe C_0 (*).*

Démonstration. — Soient

$$(1) \quad U = (a, b, c, \dots) = 0, \quad U' = (a', b', c', \dots) = 0, \dots$$

les équations mixtes des courbes $K, K', \dots$, et $V(a, b, \dots; a', b', \dots) = 0$ l'équation cartésienne de la courbe C ; cherchons d'abord ce que devient cette équation quand on substitue à la courbe K les points de contact des tangentes menées à cette courbe par un point (x, y) du plan. Soit $\omega = ux + vy + wz = 0$ l'équation d'une droite quelconque ; l'équation mixte de la première polaire relativement à K est (F. B. N° 3)

$$(2) \quad uU_2 - vU_1 + \omega\Pi = 0,$$

$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma, \dots) = 0$ étant l'équation de la première polaire de la droite de l'infini ; si nous éliminons λ et μ entre les équations (1) et (2), nous obtenons l'équation cartésienne des tangentes menées à K aux points de rencontre de cette courbe avec la droite donnée ; si ensuite, en faisant pour abrégér $X = \xi - x, Y = \eta - y$, et en considérant ξ et η comme les coordonnées courantes, nous remplaçons respectivement dans l'équation ainsi

(*) J'emploie ici les notations de mon *Mémoire sur l'application des formes binaires à la géométrie* (Journ. de Math., 3^e série, t. I).

obtenue u , v et ω par μ' , $-\lambda'$ et $\lambda'Y - \mu'X$, nous aurons l'équation mixte des points de contact des tangentes menées du point (x, y) à la courbe K . Faisant d'abord la substitution indiquée dans l'équation (2), il vient

$$(2)' \quad \lambda' \frac{dU}{dx} + \mu' \frac{dU}{dy} + n(\lambda'Y - \mu'X) \Pi(\lambda, \mu) = 0,$$

et c'est entre cette équation et l'équation (1) que nous devons éliminer λ et μ ; comme nous avons à déterminer la droite polaire du point (ξ, η) relativement à C_0 , j'observe d'abord que l'on peut négliger les puissances de X et de Y supérieures à la première. L'équation mixte des points de contact devient alors simplement, en supprimant les accents,

$$(3) \quad U(\lambda, \mu) + n(\lambda Y - \mu X) \Pi(\lambda, \mu) = 0,$$

ou encore

$$(a, b, c) + [nzY, (n-1)\beta Y - \alpha X, (n-2)\gamma Y - 2\beta X, \dots].$$

Il résulte de là que l'équation de la courbe C_0 s'obtiendra (en négligeant toujours les puissances de X et de Y supérieures à la première) en y remplaçant respectivement $a, b, c, \dots$ par $a + n\alpha Y, b + (n-1)\beta Y - \alpha X, c + (n-2)\gamma Y - 2\beta X, \dots$, et en substituant aux lettres x et y les lettres ξ, η dans les polynômes $a', b', \dots, a'', b'', \dots$.

Désignant, pour un instant, les résultats de cette substitution par $A', B', \dots, A'', B'', \dots$, l'équation de la courbe C_0 sera

$$V_1 = V(a + n\alpha Y, \dots; A', B', \dots; A'', B'', \dots) = 0,$$

et l'équation de la droite polaire du point (x, y) relativement à C_0

$$\xi \left(\frac{dV_1}{d\xi} \right) + \eta \left(\frac{dV_1}{d\eta} \right) + \rho \left(\frac{dV_1}{d\rho} \right) = 0,$$

les lettres ξ et η étant de nouveau remplacées par les lettres x et y dans les dérivées partielles.

On a évidemment

$$\left(\frac{dV_1}{d\xi} \right) = -\alpha \frac{dV}{db} - 2\beta \frac{dV}{dx} - \dots + \frac{dV}{da'} \frac{da'}{dx} + \dots + \frac{dV}{da''} \frac{da''}{dx} + \dots,$$

ou, en vertu de formules que j'ai données dans le mémoire déjà cité (F. B. N° 4),

$$\left(\frac{dV_1}{d\xi} \right) = \frac{dV}{da} \frac{da}{dx} + \frac{dV}{db} \frac{db}{dx} + \dots + \frac{dV}{da'} \frac{da'}{dx} + \dots + \frac{dV}{da''} \frac{da''}{dx} + \dots = \frac{dV}{dx}.$$

On démontrerait de même que $\left(\frac{dV_1}{d\eta} \right) = \frac{dV}{dy}$ et $\left(\frac{dV_1}{d\rho} \right) = \frac{dV}{d\rho}$.

La proposition est donc complètement établie.

REMARQUE. — Dans la définition de la courbe C_0 , on voit que la courbe K a été remplacée par un système de points; il est clair que l'on pourrait faire de même pour chacune des autres courbes $K', K'', \dots$, et même pour toutes ces courbes.

2. La proposition précédente permet de résoudre dans un grand nombre de cas intéressants le problème suivant qui comprend, en particulier, le problème de la construction de la tangente :

Étant donnée une courbe, construire la droite polaire d'un point du plan relativement à cette courbe.

Ainsi, la podaire d'une courbe K étant le lieu des points d'où l'on voit sous un angle droit cette courbe et un point fixe P , on a immédiatement la proposition suivante :

Étant donnée la podaire C d'un point P relativement à une courbe K , la polaire () d'un point M du plan relativement à la podaire est la polaire du même point relativement aux divers cercles ayant pour diamètres les droites qui joignent le point P aux points de contact des tangentes menées du point M à la courbe K .*

Semblablement, une spirique A étant le lieu des points d'où l'on voit sous un angle donné α une conique B , on peut énoncer ce théorème :

La polaire d'un point M relativement à la spirique A est la polaire de ce même point relativement aux deux cercles capables de l'angle donné et ayant pour corde commune la droite qui joint les points de contact des tangentes menées de M à la conique B .

3. Les conséquences les plus importantes du théorème I sont contenues dans les propositions suivantes que j'ai déjà données dans une note *Sur quelques propriétés des courbes algébriques* (**).

THÉORÈME II. — *Étant données deux courbes quelconques K^m et K^n , de classe respectivement égale à m et à n , la polaire d'un point quelconque M , relativement aux mn tangentes communes à ces courbes, est la polaire du même point relativement aux mn droites qui joignent les points de contact des tangentes menées de M à K^m aux points de contact des tangentes menées du même point à K^n .*

THÉORÈME III (corrélatif du précédent). — *Étant données deux courbes quelconques C^m et C^n , d'ordre respectivement égal à m et à n , le pôle d'une droite quelconque, relativement aux mn points d'intersection de ces courbes, est le pôle de la même droite relativement aux mn points d'intersection des tangentes menées à C^m aux points où cette courbe rencontre la droite avec les tangentes menées à C^n en ses points de rencontre avec la droite.*

(*) Ici, comme dans la suite de cette note, j'appelle simplement *polaire* d'un point la droite polaire de ce point.

(**) *Comptes rendus de l'Acad. des sc.* (mai 1875).

THÉOREME IV. — *La polaire d'un point quelconque relativement à une courbe de $n^{\text{ème}}$ classe est la polaire du même point relativement aux $\frac{n(n-1)}{2}$ droites qui joignent deux à deux les points de contact des tangentes que l'on peut mener du point à la courbe.*

REMARQUE. — Si la courbe a des tangentes d'inflexion et des tangentes doubles, ces droites doivent être considérées comme faisant partie de cette courbe, en comptant deux fois chaque tangente double, et trois fois chaque tangente d'inflexion.

THÉOREME V (corrélatif du précédent). — *Le pôle d'une droite quelconque relativement à une courbe du $n^{\text{ème}}$ ordre est le pôle de la même droite relativement aux $\frac{n(n-1)}{2}$ points d'intersection des tangentes menées à la courbe aux points où elle est rencontrée par la droite.*

REMARQUE. — Si la courbe a des points doubles et des points de rebroussement, ces points doivent être considérés comme faisant partie de cette courbe, en comptant deux fois chaque point double et trois fois chaque point de rebroussement.

II

4. Considérons une courbe gauche quelconque K et une droite de l'espace Δ ; par cette droite, menons un plan quelconque et prenons le pôle de la droite relativement aux points d'intersection du plan et de la courbe; lorsque le plan tourne autour de la droite, le lieu du pôle est une droite que j'appellerai la polaire de Δ relativement à la courbe gauche et que je désignerai par la notation $\Delta(K)$.

Poncelet a donné de belles propriétés de ces polaires (*); on voit immédiatement, par exemple, que la polaire d'une droite relativement à une courbe gauche est la polaire de cette droite relativement aux tangentes menées à cette courbe aux points où elle est coupée par un plan quelconque mené par la droite. Je ne crois pas que, jusqu'ici, on ait indiqué comment on peut déterminer la polaire d'une droite relativement à une courbe, lorsqu'au lieu de donner cette courbe on la définit comme l'intersection de deux surfaces. Je m'occuperai simplement ici du cas où la courbe est l'intersection complète de deux surfaces, les autres cas se ramenant évidemment à celui-là.

Du théorème III on déduit immédiatement la proposition suivante:

THÉOREME VI. — *Une courbe gauche étant l'intersection complète de deux*

(*) *Propriétés projectives des figures. Section IV.* Poncelet, au lieu du mot *polaire*, emploie l'expression d'*axe des moyennes harmoniques*.

surfaces S et S', la polaire d'une droite relativement à cette courbe est la polaire de cette même droite relativement aux diverses droites d'intersection des plans menés tangentiellement à S aux points où cette surface rencontre la droite avec les plans menés tangentiellement à S' aux points où la droite coupe cette surface.

5. Considérons une surface quelconque Σ et une droite de l'espace Δ ; par cette droite menons un plan quelconque et prenons le pôle de la droite relativement à la courbe d'intersection de la surface et du plan (la courbe étant considérée comme étant d'une classe donnée); lorsque le plan tourne autour de la droite, le pôle décrit une droite que j'appellerai la polaire de Δ , relativement à la surface et que je représenterai par la notation $\Delta(\Sigma)$.

Cette polaire peut être évidemment encore définie comme l'enveloppe des plans polaires des différents points de Δ relativement aux cônes circonscrits à Σ et ayant ces points pour sommets (ces cônes étant considérés comme d'un ordre donné).

Par suite, si la surface Σ ne comporte aucune singularité relativement à son ordre, c'est-à-dire n'a ni ligne double ni ligne de rebroussement, on déduit immédiatement du théorème V la proposition suivante :

THÉORÈME VII. — *Si une surface du $n^{\text{ème}}$ ordre n'a aucune singularité, la polaire d'une droite relativement à cette surface est la polaire de cette droite relativement aux $\frac{n(n-1)}{2}$ droites suivant lesquelles se coupent les plans qui touchent la surface aux points où elle rencontre la droite.*

De même, si la surface Σ ne comporte aucune singularité relativement à sa classe, le théorème IV donne la proposition suivante corrélatrice de la précédente :

THÉORÈME VIII. — *Si une surface de $n^{\text{ème}}$ classe n'a aucune singularité, la polaire d'une droite relativement à cette surface est la polaire de la droite relativement aux $\frac{n(n-1)}{2}$ droites qui joignent deux à deux les points de contact des plans tangents que l'on peut mener à la surface par la droite donnée.*

6. En particulier, si l'on considère une surface développable G ayant pour arête de rebroussement une courbe gauche K et un point quelconque M de la droite Δ , le plan polaire de M , relativement à l'ensemble des plans osculateurs de la courbe qui passent par ce point, enveloppe, quand le point M se déplace sur la droite, la polaire de cette droite relativement à G .

Si la développable G est définie au moyen de deux surfaces inscrites S et S' , on a le théorème suivant corrélatif du théorème VI :

THÉORÈME IX. — *Une surface développable G étant la développable complète circonscrite à deux surfaces S et S' , la polaire d'une droite relativement à cette développable est la polaire de cette droite relativement aux droites qui*

joignent chacun des points de contact des plans menés par la droite tangentiellement à S à chacun des points de contact des plans menés par la même droite tangentiellement à S' .

7. En particulier, considérons une suite de surfaces homofocales du second ordre (Σ) inscrite dans la développable isotrope Γ .

Soient Σ et Σ' deux quelconques de ces surfaces; d'une droite Δ on peut leur mener quatre plans tangents, les droites qui joignent les points de contact sur l'une des surfaces avec les points de contact sur l'autre forment un quadrilatère gauche Q .

De ce qui précède, il résulte que :

La polaire de la droite Δ par rapport au quadrilatère Q () est la même, quelles que soient les deux surfaces homofocales considérées, et se confond avec la polaire de cette même droite relativement à la développable isotrope circonscrite.*

En particulier, si la surface Σ' se réduit à l'ombilicale, la polaire de Δ se réduit à la polaire de cette droite relativement aux normales que l'on peut mener à Σ aux deux points où cette surface est touchée par les plans tangents qu'on peut lui mener par Δ . D'où cette conséquence :

*Étant donné un système de surfaces homofocales du second ordre (Σ) et une droite fixe Δ , si par Δ on mène les plans tangents à une surface quelconque Σ du système et si l'on prend la polaire de Δ relativement aux normales qu'on peut mener à Σ aux deux points de contact, la polaire de Δ relativement à ces normales est la même quelle que soit la surface du système que l'on considère et elle se confond avec la polaire relativement à la développable isotrope circonscrite au système (**).*

III

8. Les deux théorèmes généraux VII et VIII s'appliquent, avec quelques modifications, à toute surface donnée, en sorte qu'ils fournissent en réalité deux moyens distincts de construire la polaire d'une droite donnée relativement à cette surface. Il serait facile d'énoncer à ce sujet les propositions générales, mais je crois inutile de le faire et je me contenterai d'énoncer les résultats relatifs à deux surfaces particulières des plus simples.

(*) Ce quadrilatère Q jouit encore de plusieurs autres propriétés intéressantes; ainsi la somme de deux de ses côtés contigus est égale à la somme des deux autres. (Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace, *Nouv. Ann. de Math.*, 1872.)

(**) Cette proposition s'étend évidemment à un système de surfaces homofocales quelconques; on peut la considérer comme l'extension à l'espace de ce théorème que j'ai donné depuis longtemps :

Le centre harmonique d'un point, par rapport aux points de contact des tangentes qu'on peut mener de ce point à une courbe de $n^{\text{ème}}$ classe, est le centre harmonique du même point relativement aux n foyers de la courbe.

Considérons, en premier lieu, une cubique gauche K et la développable du 4^{ème} ordre G dont elle est l'arête de rebroussement; soient $\Delta(K)$ et $\Delta(G)$ les polaires d'une même droite Δ relativement à la courbe gauche et à la développable (Cff. N° 4 et N° 6).

Si, d'un point quelconque M de la droite Δ , on mène le cône contenant la courbe K , ce cône est du 3^{ème} degré et de la 4^{ème} classe; il a trois plans d'inflexion, qui sont les plans osculateurs que l'on peut mener à K par le point M . Le plan polaire de M relativement à ce cône contient la polaire $\Delta(K)$; du théorème IV et des considérations ci-dessus développées (N° 6) résulte la proposition suivante :

THÉORÈME X. — *En désignant par t l'ensemble des 6 droites qui joignent deux à deux les 4 points de la courbe K , dont les tangentes s'appuient sur Δ , on a la relation*

$$2\Delta(t) = \Delta(K) + 3\Delta(G).$$

9. Concevons maintenant que, par la droite Δ , on mène un plan quelconque; il coupe la surface G suivant une courbe du 4^{ème} ordre et de la 3^{ème} classe ayant pour point de rebroussement ses trois points de rebroussement sur K . Le pôle de Δ relativement à cette courbe est sur $\Delta(G)$; du théorème V résulte la proposition suivante :

THÉORÈME XI. — *En désignant par T l'ensemble des 6 droites suivant lesquelles se coupent les plans osculateurs menés aux points de K , dont les tangentes s'appuient sur Δ , on a*

$$2\Delta(T) = \Delta(G) + 3\Delta(K).$$

REMARQUE. — On déduit de là

$$4\Delta(G) = 3\Delta(t) - \Delta(T)$$

et

$$4\Delta(K) = 3\Delta(T) - \Delta(t);$$

on voit que les polaires d'une droite relativement à K et à G sont déterminées quand on connaît les quatre tangentes à la courbe qui la rencontrent. Par suite :

Deux droites Δ et Δ' , conjuguées par rapport à la cubique gauche K ont mêmes polaires relativement à cette cubique, et relativement à la développable dont elle est l'arête de rebroussement.

Ces deux polaires sont également conjuguées par rapport à la cubique.

10. Considérons en second lieu une surface réglée S du 3^{ème} ordre (et par conséquent de 3^{ème} classe); appelons D la directrice double de cette surface et D' la seconde directrice rectiligne; on sait que tout plan passant par D' est doublement tangent à la surface.

Cela posé, soient Δ une droite quelconque de l'espace et $\Delta(S)$ sa polaire relativement à S ; si l'on mène par Δ un plan quelconque, il coupe S suivant une courbe du 3^{ème} ordre et de la 4^{ème} classe, ayant pour point double le point de rencontre de ce plan avec D . Du théorème IV, on déduit la proposition suivante :

THÉOREME XII. — *En désignant par t le triangle formé par les points de contact des plans tangents que l'on peut mener à S par la droite Δ , on a*

$$2\Delta(t) = \Delta(S) + 2\Delta(D).$$

11. Prenons maintenant un point quelconque M sur la droite Δ et imaginons le cône circonscrit à la surface et ayant ce point pour sommet; ce cône est de la 3^{ème} classe et du 4^{ème} ordre, il a pour plan double le plan mené par le point M et par la droite D' .

Du théorème V résulte donc la proposition suivante :

THÉOREME XIII. — *En désignant par T les arêtes du trièdre formé par les plans menés tangentielllement à S en ses points de rencontre avec Δ , on a*

$$2\Delta(T) = \Delta(S) + 2\Delta(D').$$

Des deux relations précédentes, on déduit

$$\Delta(T) + \Delta(D) = \Delta(t) + \Delta(D'),$$

identité sur laquelle je reviendrai plus tard.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

SÉANCE DU MERCREDI 17 FÉVRIER 1875

PRÉSIDÉE PAR M. JORDAN

Est présenté, comme nouveau membre de la Société, M. Denys Cochin, à Paris.

M. Halphen communique un mémoire *Sur une question d'élimination*.

M. Laguerre communique des *Théorèmes analogues au théorème de Rolle, et relatifs aux racines imaginaires des équations algébriques*.

M. Mannheim présente quelques observations au sujet de la communication faite par M. Laguerre dans la précédente séance.

SÉANCE DU MERCREDI 3 MARS 1875

PRÉSIDENT PAR M. JORDAN

M. Denys Cochin est élu membre de la Société.

Est présenté, comme nouveau membre, M. Maloizel, ancien élève de l'École polytechnique, à Paris.

M. Fouret communique une note sur la *Résolution graphique d'un système d'équations du premier degré*.

M. Halphen fait une communication *Sur les courbes planes dont le rayon de courbure est proportionnel à la normale polaire*.

SÉANCE DU MERCREDI 17 MARS 1875

PRÉSIDENT PAR M. RESAL

M. Maloizel est élu membre de la Société.

Sont présentés, comme nouveaux membres, MM. Tannery, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris; Puiseux, membre de l'Institut, à Paris.

M. Laguerre fait une communication *Sur l'intégrale de l'équation d'Euler*.

M. Halphen communique une note *Sur certaines perspectives gauches des courbes algébriques planes*.

SÉANCE DU MERCREDI 31 MARS 1875

PRÉSIDENT PAR M. LEMONNIER

MM. Tannery et Puiseux sont élus membres de la Société.

M. Fouret communique quelques *Théorèmes sur les implexes et sur les systèmes de surfaces*.

M. Halphen présente quelques observations sur le même sujet.

M. de Polignac communique quelques *Théorèmes relatifs à des systèmes de courbes*.

Le secrétaire donne lecture, de la part de M. Brocard, d'une *Note sur un compas trisecteur proposé par M. Laisant*.

SÉANCE DU MERCREDI 14 AVRIL 1875

PRÉSIDENT PAR M. JORDAN

M. Fouret communique *Quelques propriétés des faisceaux de systèmes de courbes*.

M. le comte Hugo communique *Quelques remarques sur les publications, en langue allemande, relatives à l'histoire de la géométrie.*

M. Halphen présente *Quelques observations au sujet d'un théorème de M. Maximilien Marie, concernant les périodes cycliques des intégrales quadratrices des courbes algébriques.*

Le secrétaire donne lecture, de la part de M. Saltel, de plusieurs *Notes relatives aux cycliques et aux cyclides.*

SÉANCE DU MERCREDI 28 AVRIL 1875

PRÉSIDÉE PAR M. MANNHEIM

Est présenté, comme nouveau membre de la Société, M. Bischoffsheim, à Paris.

M. le comte Hugo fait une communication *Sur les ovhélites planétaires.*

M. Halphen communique le théorème suivant : *Étant données, sur une surface quelconque, plusieurs séries de courbes, telles que deux courbes quelconques de deux mêmes séries se coupent sous le même angle, les centres de courbure géodésique des courbes de toutes les séries, relatifs à un même point, sont en ligne droite.*

SÉANCE DU MERCREDI 12 MAI 1875

PRÉSIDÉE PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ

M. Bischoffsheim est élu membre de la Société.

Le secrétaire annonce que M. Bischoffsheim s'est fait inscrire comme *sociétaire perpétuel.*

M. Fouret fait une communication *Sur un nouveau mode de génération des courbes planes d'ordre n à point multiple d'ordre $n-1$.*

M. Perrin présente quelques observations au sujet de cette communication.

M. Halphen présente quelques remarques sur le même sujet, et une extension de ce mode de génération à toutes les courbes unicursales.

M. de Polignac fait une communication *Sur un nouvel algorithme destiné à représenter le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, et sur quelques applications de cet algorithme.*

M. Jordan communique à la Société un *Essai sur la géométrie à n dimensions.*

SÉANCE DU MERCREDI 26 MAI 1875

PRÉSIDENTE PAR M. MANNHEIM

M. Halphen présente quelques observations au sujet d'un théorème de M. Laguerre, concernant les polaires des courbes algébriques, et le déduit d'un théorème de M. Liouville.

M. Laguerre communique, sur le même sujet, un théorème plus général, et en fait quelques applications.

SÉANCE DU MERCREDI 23 JUIN 1875

PRÉSIDENTE PAR M. DESIRÉ ANDRÉ

Est présenté, comme nouveau membre de la Société, M. Sancerly, professeur de mathématiques, à Paris.

Le secrétaire donne lecture d'une lettre de M. Carl Ohrtmann, qui demande à échanger contre le *Bulletin* le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*.

M. Halphen présente un mémoire de M. Schubert *Sur la détermination des caractéristiques des systèmes de cubiques planes et gauches*. M. Halphen rappelle, à ce sujet, quelques considérations développées par lui dans un précédent mémoire, et dont M. Schubert a fait usage dans le sien.

SÉANCE DU MERCREDI 7 JUILLET 1875

PRÉSIDENTE PAR M. JORDAN

M. Sancerly est élu membre de la Société.

M. Tchebycheff communique une note *Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions*.

SÉANCE DU MERCREDI 21 JUILLET 1875

PRÉSIDENTE PAR M. JORDAN

L'Association française pour l'avancement des sciences invite la Société mathématique à déléguer un de ses membres pour la représenter aux séances qui doivent se tenir à Nantes. M. Mannheim est délégué.

M. Perrin fait une communication *Sur le principe d'un compas à $n+1$ tiges articulées permettant de partager un angle donné en n parties égales.*

M. Sancery donne lecture d'un mémoire *Sur les nombres qui appartiennent à un exposant donné suivant un module de la forme p^a et $2p^a$.*

M. Fouret fait une communication *Sur quelques propriétés des rayons de courbure.*

FIN DU TOME TROISIÈME

TABLE DES MATIÈRES

État de la Société au 31 janvier 1875	5
Statuts de la Société.	9
Règlement administratif.	10

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX

Séance du mercredi 11 novembre 1874.	16
Séance du mercredi 25 novembre 1874.	16
Séance du mercredi 9 décembre 1874.	17
Séance du mercredi 23 décembre 1874.	17
Séance du mercredi 6 janvier 1875.	17
Séance du mercredi 20 janvier 1875.	18
Séance du mercredi 3 février 1875.	19
Séance du mercredi 17 février 1875.	181
Séance du mercredi 3 mars 1875.	182
Séance du mercredi 17 mars 1875.	182
Séance du mercredi 31 mars 1875.	182
Séance du mercredi 14 avril 1875.	182
Séance du mercredi 28 avril 1875.	183
Séance du mercredi 12 mai 1875.	183
Séance du mercredi 26 mai 1875.	184
Séance du mercredi 23 juin 1875.	184
Séance du mercredi 7 juillet 1875.	184
Séance du mercredi 21 juillet 1875.	184

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Sur une propriété du polynôme $(x^2 - 1)^2$; par M. C. DE POLIGNAC.	19
Sur le contact des surfaces; par M. HALPHEN	28
Sur la courbure des surfaces de carène; par H. A. DE SAINT-GERMAIN.	37
Propriété nouvelle du quadrilatère et du triangle; par M. BROCARD.	38
Sur l'intégration de quelques équations différentielles; par M. L. V. TURQUAN.	40
Questions.	46
Note sur un compas trisecteur proposé par M. Laisant; par M. H. BROCARD	47
Mémoire sur la transformation des formes quadratiques; par M. H. LEMONNIER.	48

Sur une question d'élimination ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier; par M. HALPHEN.	76
Résolution graphique d'un système d'équations du premier degré; par M. G. FURET. .	93
Sur la génération des cycliques et cyclides; par M. L. SALTEL.	95
Seconde note sur la génération des cycliques; par M. L. SALTEL.	99
Sur les foyers des cycliques; par M. L. SALTEL.	100
Sur différentes formes que l'on peut donner à l'intégrale de l'équation d'Euler; par M. LAGUERRE.	101
Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions; par M. TCHERNYCHEF.	103
Essai sur la géométrie à n dimensions; par M. CAMILLE JORDAN.	103
Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques; par M. LAGUERRE.	174

